erscheint in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, voraussichtlich III. Quartal 2004

Entscheidungskalküle jenseits des subjektiven Erwartungsnutzens

Ein Plädoyer für die Verwendung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten

Hagen Lindstädt*

Zusammenfassung

Ausgangspunkt sind die bekannten empirischen Verstöße gegen Axiome der Bernoulli-Rationalität und die Diskussion um seine präskriptive Ausschließlichkeit. Der Beitrag teilt Nichterwartungsnutzenkalküle in Kategorien ein, die sich für eine Modellierung unterschiedlicher Arten von Verstößen eignen, je nachdem, ob diese Allais-artig oder Ellsberg-artig sind. Es wird argumentiert, dass eine Modifikation des Hurwicz-Kriteriums bei Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten einen guten Kompromiss darstellt: Der Kalkül ist axiomatisch begründet, praktikabel – das heißt einfach anwendbar, klar interpretierbar und kompatibel zum Erwartungsnutzen – und erlaubt die Modellierung einer wichtigen Klasse deskriptiver Verstöße. An Neuem bringt der Beitrag erstens einen Bezugsrahmen für die Verwendung der Kalküle je nach Art des Verstoßes. Zweitens wird eine axiomatische Verankerung des modifizierten Hurwicz-Kriteriums gegeben, indem dieses als Spezialfall des Choquet-Erwartungsnutzen-Kalküls bei Vorliegen unterer und oberer Zustandswahrscheinlichkeiten charakterisiert wird. Für eben diese Wahrscheinlichkeiten wird drittens eine Interpretation im Rahmen des klassischen Wahrscheinlichkeitsformalismus gegeben.

Schlagwörter: Entscheidungen unter Unsicherheit, Nichterwartungsnutzentheorien, Ambiguität, Hurwicz-Kriterium, untere und obere Wahrscheinlichkeiten.

JEL-Klassifikation: D80, D81

* Professor Dr. Hagen Lindstädt, Lehrstuhl für Strategisches Management und Organisation, HHL (Leipzig Graduate School of Management - Handelshochschule Leipzig), Jahnallee 59, 04109 Leipzig, e-mail: lindstaedt@management.hhl.de.

Der Autor dankt den Herren Hugo Kossbiel, Pierfrancesco La Mura, Gerhard Muche, Thomas Spengler, Michael Wolff und einem anonymen Gutachter für wertvolle Hinweise.

Decision-Making beyond Subjective Expected Utility

An advocacy for applying lower and upper probabilities

Summary

Starting point are the well-known empirical violations of axioms of Bernoulli Rationality and the discussion about its prescriptive exclusivity. The paper classifies non-expected utility models into categories which are suitable to model different kinds of violations, depending on whether they follow either Allais or Ellsberg. The argument is brought forward that a modification of Hurwicz's Criterion is a good compromise, provided that lower and upper probabilities exist: the model is axiomatically founded, practicable – that means simply applicable, clearly interpretable and compatible with expected utility – and allows the modelling of an important class of descriptive violations. The new aspects of the article are firstly a frame of reference for the use of the models depending on the type of violation. Secondly, an axiomatic bracing of the modified Hurwicz Criterion is given by characterizing it as a special case of the Choquet expected utility when lower and upper state-probabilities occur. Thirdly, for these probabilities a clear interpretation is given within the classic probability framework.

Keywords: Decision-making under Uncertainty, Non-expected utility theories, Ambiguity, Hurwicz Criterion, Lower and upper probabilities.

JEL-Classification: D80, D81

Entscheidungskalküle jenseits des subjektiven Erwartungsnutzens

Ein Plädoyer für die Verwendung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten

1 Grenzen des subjektiven Erwartungsnutzens

Dieser Beitrag diskutiert Entscheidungskalküle jenseits des subjektiven Erwartungsnutzens, der in vielen ökonomischen Modellen und Situationen außerordentlich elegant und erfolgreich eingesetzt wird. Besonders in den letzten beiden Dekaden findet sich eine reichhaltige Literatur zu Grenzen der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens, und an Vorschlägen zu seiner Erweiterung mangelt es nicht. Trotzdem ist es für eine Verortung dieses Beitrags erforderlich, die beiden wesentlichen Grenzen dieser erfolgreichen Theorie noch einmal aufzuzeigen: Deskriptiv zeigen sich systematische Verstöße gegen das Modell, und – weit weniger bekannt, aber in einer ökonomischen Diskussion mindestens ebenso wichtig – nicht alle Veränderungen des Modells sind präskriptiv fragwürdig. Trotz aller Vorzüge kann die Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens somit keinen präskriptiven Alleinvertretungsanspruch rationalen Entscheidens bei Unsicherheit für sich reklamieren.

Wenig schlüssigen Kritikpunkten am subjektiven Erwartungsnutzenkonzept schließt sich der Beitrag jedoch nicht an: die Tatsache, dass ein objektiver Erwartungsnutzen wegen Unkenntnis objektiver Wahrscheinlichkeiten meist nicht berechnet werden kann, ist seit *Savages* Erweiterung des Kalküls auf den subjektiven Erwartungsnutzen unproblematisch.[1] Auch Argumenten gegen eine subjektive Wahrscheinlichkeitsauffassung wird nicht gefolgt.[2]

Der Beitrag entwickelt entlang eines aktuellen Literaturüberblicks einen Bezugsrahmen für die Verwendung axiomatisch begründeter Entscheidungskalküle je nachdem, ob Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome im Sinne *Ellsbergs* oder *Allais* bekannter Paradoxien vorliegen. Im Mittelpunkt der Diskussion stehen Ellsberg-artige Verstöße bei Vorliegen unterer und oberer Zustandswahrscheinlichkeiten. Dieser Fall wird im Rahmen des klassischen Wahrscheinlichkeitsformalismus interpretiert, und es wird gezeigt, dass sich eine Modifikation des bekannten Hurwicz-Kriteriums auf die sehr viel kompliziertere Theorie des Choquet-Erwartungsnutzen-Kaküls mit nicht additiven Kapazitäten zurückführen lässt.

1.1 Zu deskriptiven Verstößen

Mit den meisten empirisch belegten Verstößen[3] von Entscheidungsträgern gegen die Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens kann die Mehrheit der Ökonomen vermutlich gut leben. Von einer Entscheidungstheorie, die auch eine präskriptive Gültigkeit für sich beansprucht, wird man sogar fordern müssen, dass sie gewisse Präferenzen und Handlungen *nicht* zulässt, obwohl diese empirisch beobachtet werden. Besonders zwei Klassen empirisch belegter Verstöße geben jedoch auch in präskriptiver Hinsicht insofern Schwierigkeiten auf, als sich auf den zweiten Blick - anders als oft geglaubt - nicht notwendig Inkonsistenzen bei ihrer Modellierung ergeben: Ausgangspunkte für diese Verstöße sind die bekannten Paradoxien von *Allais* und *Ellsberg*.[4]

---

1 Siehe hierzu etwa Savage (1954) und Camerer/Weber (1992).

2 Zu dieser Diskussion vgl. Gottinger (1974); Schneeweiß (1963); Hax (1974); Laux (1976); Anscombe/Aumann (1963).

3 Zu Überblicken vgl. Eisenführ/Weber (1994); Kahneman/Tversky (1979); Einhorn/Hogarth (1986).

4 Vgl. Allais (1953); Ellsberg (1961).

In *Ellsbergs* bekannten Zwei- und Dreifarbenproblemen vergleicht ein Entscheidungsträger eine Situation mit naheliegendem Wahrscheinlichkeitsurteil mit einer, in der er sich subjektiv nur unter Schwierigkeiten in der Lage sieht, Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. In dieser Situation verstoßen Entscheidungsträger gegen das Unabhängigkeitsaxiom und zeigen systematisch eine Aversion gegenüber den weniger naheliegenden Wahrscheinlichkeitsurteilen („*Ambiguitätsaversion*"). In der (psychologisch geprägten) Literatur wurden zahlreiche, mehr oder weniger überzeugende Motive als Gründe für das beobachtete Verhalten vorgeschlagen, etwa antizipiertes Bedauern, eine eigenständige Kontrollmotivation oder spätere Bewertung durch andere Entscheider.[5] Ferner konnten einige differenziertere Muster hinsichtlich der Art der empirischen Abweichungen festgestellt werden, wie Aversion in Bereichen selbst wahrgenommener Inkompetenz und Freude in solchen mit hoher Einschätzung der Eigenkompetenz.[6] Die Vielfalt psychologischer Erklärungsansätze kann jedoch für sich genommen noch kein Argument gegen die Verwendung in der ökonomischen Theorie sein: es sei daran erinnert, dass bis heute wohl letztlich keine Klarheit über die psychologischen Quellen von Risikoaversion und Risikofreude herrscht. Dies tut ihrer sinnvollen Berücksichtigung in der Ökonomie jedoch keinen Abbruch.

Anders als bei *Ellsberg* ordnet der Entscheidungsträger beim zweiten Ausgangspunkt, dem Allais-Paradox, den Zuständen subjektive Wahrscheinlichkeiten zu. Formal liegt also (zunächst) eine Entscheidung unter Risiko vor. Die Zustandswahrscheinlichkeiten fungieren jedoch nicht durchgängig als Entscheidungsgewichte für den Erwartungsnutzen, und die Wahlhandlungen verstoßen gegen das Unabhängigkeitsaxiom - etwa weil ein Entscheidungsträger sich bei den Zuständen unterschiedlich sicher über seine subjektiven Wahrscheinlichkeiten ist. Außerdem tendieren Entscheidungsträger beispielsweise dazu, Unterschiede zwischen Wahrscheinlichkeiten stärker zu berücksichtigen, wenn diese in der Nähe von 0 oder in der Nähe von 1 liegen, als wenn sich diese in der Nähe von 0,5 befinden. Diesen Effekt haben *Kahneman* und *Tversky* bereits in der ersten Version ihrer Prospekt-Theorie beschrieben und ihm durch Einführung einer Wahrscheinlichkeitsgewichtungsfunktion Rechnung zu tragen versucht. Die Prospekt-Theorie hat neuerdings durch deutschsprachige Beiträge im Zusammenhang mit einer Diskussion in Absatz und Marketing an Aktualität gewonnen.[7]

Als gemeinsame Erklärung für die Paradoxien von *Ellsberg* und *Allais* bietet sich die Erklärung an, Entscheidungsträger würden sich pessimistisch oder optimistisch verhalten. *Wakker* hat jüngst verdeutlicht, dass in den beiden Paradoxien verschiedene Pessimismus-/Optimismusformen vorliegen: im Ellsberg-Paradox verhalten sich Entscheidungsträger bei Ambiguität pessimistischer als unter Risiko. *Wakker* bezeichnet dies als *relativen Pessimismus* – analog ist hier auch relativer Optimismus denkbar. Demgegenüber handelt der typische Entscheider im Allais-Paradox in einem *absoluten* Sinne pessimistisch oder optimistisch: Die Tendenz zu einem vom Erwartungsnutzen abweichenden Verhalten besteht nicht nur im Vergleich zu einer Situation mit glaubwürdigeren Wahrscheinlichkeiten, sondern unabhängig davon. In diesem Sinne ist sie absolut.[8]

---

[5] Vgl. etwa die Zusammenfassung bei Curley/Yates/Abrams (1986) sowie Janis/Mann (1977), S.222ff zu antizipiertem Bedauern und Osnabrügge/Stahlberg/Frey (1985) zur Kontrollmotivation.

[6] Vgl. Heath/Tversky (1991); Keppe/Weber (1995). Fox/Tversky (1995) und Fox/Weber (2002) stellen einen Zusammenhang mit der Manifestation von mehr oder weniger Kompetenz fest.

[7] Vgl. Kahneman/Tversky (1979) sowie Gierl/Helm/Stumpp (2002); Gierl/Höser (2002).

[8] Vgl. Wakker (2001), ähnlich Ghirardato/Marinacci(2002). Absoluter Pessimismus ist nicht mit vollständigem Pessimismus im Sinne der Maximierung des minimalen Nutzens zu verwechseln.

Als Allais-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome werden im Folgenden solche bezeichnet, bei denen subjektive Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die Wahl jedoch nicht anhand des mit ihnen ermittelten Erwartungsnutzens getroffen wird. Sieht sich der Entscheidungsträger subjektiv nur unter Schwierigkeiten in der Lage, subjektive Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, so werden die entsprechenden Verstöße Ellsberg-artig genannt.

1.2 Zur präskriptiven Ausschließlichkeit

Kritik an der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens setzt in den meisten Fällen bei ihrer deskriptiven Gültigkeit an. Leider endet sie meist auch dort, und gegen Nichterwartungsnutzentheorien werden präskriptive Argumente ins Feld geführt, die häufig nicht nur gegen den einzelnen Vorschlag gerichtet sind. Tatsächlich weisen eine Reihe von Entscheidungskalkülen jenseits des subjektiven Erwartungsnutzens („Nichterwartungsnutzentheorien") präskriptive Inkonsistenzen auf. Das Problem besteht darin, dass vielfach die Einschätzung zu bestehen scheint, *jede* Abweichung vom subjektiven Erwartungsnutzen sei mit dem Makel solcher Inkonsistenzen behaftet. Dies führt zu der weitverbreiteten Auffassung, die Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens sei zwar in vielen Fällen deskriptiv nicht vollständig überzeugend, aber jede Abweichung würde mit dem Preis präskriptiver Inkonsistenzen bezahlt. Wohl deshalb ziehen viele Ökonomen die Verwendung anderer Entscheidungskalküle nur selten in Erwägung.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass der Übergang von der reinen Erwartungswertorientierung zu einer Berücksichtigung des Risikos in der Erwartungsnutzentheorie nicht durch Kritik an der präskriptiven Gültigkeit des Erwartungswertkalküls zustande kam. Vielmehr verdeutlichte *Daniel Bernoullis* Petersburger Spiel 1732 die deskriptive Unzulänglichkeit des Kalküls hinsichtlich der Risikoberücksichtigung. Außerdem stand zu einem viel späteren Zeitpunkt mit der Erwartungsnutzentheorie eine auch präskriptiv konsistente Theorie zur Verfügung.

Zur Beurteilung von Entscheidungskalkülen werden die Kriterien *statischer und dynamischer Konsistenz* herangezogen. Tatsächlich sind keineswegs alle Nichterwartungsnutzenkalküle statisch oder dynamisch inkonsistent. *Machina* bezeichnet einen Entscheidungskalkül als *statisch konsistent*, wenn er keine intransitiven Präferenzen oder die Verletzung des Prinzips der stochastischen Dominanz erster Ordnung zulässt. Bei dieser Verletzung zeigt ein Entscheidungsträger eine strenge Präferenz für eine Alternative, deren (kumulative) Gewinnverteilung vollständig schlechter ist als die einer weniger präferierten. Die (präskriptive) Forderung nach ihrer Einhaltung liegt auf der Hand, so dass die statische Konsistenz als Beurteilungskriterium für Nichterwartungsnutzenkalküle herangezogen wird.[9]

Als zweites Konsistenzkriterium wird die *dynamische Konsistenz* herangezogen. *Bei einer mehrstufigen Entscheidung ist ein Entscheidungsträger dynamisch konsistent, wenn seine geplanten und seine tatsächlich realisierten Präferenzen miteinander übereinstimmen, solange keine unvorhergesehenen Informationen bekannt werden.* Der Entscheidungsträger hält dann also an einer gefassten Entscheidungsstrategie fest. Sein Gewicht bei einstufigen Entscheidungen erhält das Kriterium der dynamischen Konsistenz daraus, dass einstufige Entscheidungen durch Umformungen in äquivalente mehrstufige Entscheidungen überführt werden können. Dabei bedient man sich des

---

[9] Vgl. Machina (1989), S. 1633ff. Er nennt in diesem Zusammenhang zunächst noch Schwierigkeiten aus inkonsistenten Wahrscheinlichkeitsurteilen, kennzeichnet diesen Aspekt jedoch richtigerweise als nicht zur (statischen) Konsistenz des Entscheidungskalküls gehörig.

Axioms der Reduktion mehrstufiger Lotterien, das folgendes besagt:[10] *Führen zwei oder mehr, möglicherweise mehrstufige Handlungsalternativen zu identischen Ergebnisverteilungen, so ist der Entscheidungsträger indifferent zwischen diesen Alternativen. Er verändert dann seine Präferenzen bei Auflösung der Mehrstufigkeit nicht.*

Auch die dynamische Konsistenz ist eine sinnvolle Forderung: Sind die Präferenzen eines Entscheidungsträgers nämlich nicht dynamisch konsistent, so lässt sich zeigen, dass erstens stets jemand von ihm eine sichere Zahlung ohne Gegenleistung erhalten kann („Money Pump"- oder „Dutch-Book"-Argument). Zweitens lassen sich stets Entscheidungen und Präferenzen finden, in denen sich der Entscheidungsträger informationsavers verhalten würde.[11] Ein dynamisch inkonsistenter Entscheidungskalkül müsste aus präskriptiver Sicht somit abgelehnt werden.

Schwierigkeiten bei der Beurteilung von Nichterwartungsnutzentheorien ergeben sich vor allem mit der Forderung nach dynamischer Konsistenz. Es wurde nämlich in der Literatur die Auffassung vertreten, jeder Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom der subjektiven Erwartungsnutzentheorie würde zu dynamischen Inkonsistenzen führen. Das *Unabhängigkeitsaxiom* besagt folgendes:[12] *Angenommen, eine Handlungsalternative A_1 wird gegenüber einer Alternative A_2 präferiert. Dann wird auch jede stochastische Mischung von A_1 mit einer dritten Alternative A_3 gegenüber der identischen Mischung von A_2 mit A_3 präferiert.* An diesem Axiom setzen deskriptive Kritik und Erweiterungen des subjektiven Erwartungsnutzens zentral an, einschließlich der beiden Paradoxien von *Allais* und *Ellsberg*. Der Nachweis, Entscheidungskalküle seien bei einem Verstoß gegen das Unabhängigkeitsaxiom grundsätzlich dynamisch inkonsistent, käme also dem Eingeständnis gleich, der zentralen deskriptiven Kritik am Unabhängigkeitsaxiom könne nur um den Preis einer präskriptiven Inkonsistenz entsprochen werden. Tatsächlich ergibt sich ein differenzierteres Bild:

Es besteht nämlich ein enger Zusammenhang zwischen dem Axiom der Reduktion mehrstufiger Lotterien, dem Unabhängigkeitsaxiom, dynamischer Konsistenz und dem sogenannten *Konsequenzialismus* eines Entscheidungsträgers. *Ein Entscheidungsträger ist konsequenzialistisch, wenn seine Präferenzen an jedem Punkt eines mehrstufigen Entscheidungsbaumes unabhängig davon sind, welche zurückliegenden Zweige des Baumes wie realisiert wurden. Präferenzen und Risikoeinstellung eines konsequenzialistischen Entscheidungsträgers sind in diesem Sinne zwischenzustands-unabhängig.* Die Präferenzen einer mehrstufigen Alternative sind bei Konsequenzialismus also separabel hinsichtlich aller vorkommenden Zwischenzustände des Entscheidungsbaumes, und die Historie der Auflösungsfolge und getragenen Risiken ist bedeutungslos.[13]

Mit diesen Begriffen gilt folgender Zusammenhang:[14] *Angenommen, die Präferenzen eines Entscheidungsträgers erfüllen das Axiom der Reduktion mehrstufiger Lotterien und die Forderung nach Konsequenzialismus. In diesem Fall sind sie genau dann dynamisch konsistent, wenn sie das Unabhängigkeitsaxiom erfüllen.*

Ein Entscheidungskalkül, der gegen das Unabhängigkeitsaxiom verstößt, kann also nur dann dynamisch konsistent sein, wenn die Forderung nach Konsequenzialismus fallen gelassen wird. Tatsächlich zeigt *Machina*, dass es nicht-konsequenzialistische Entschei-

---

[10] Vgl. etwa Eisenführ/Weber (1994), S.207f.

[11] Vgl. Raiffa (1968), S.83ff; Yaari (1985) zum Money Pump-Argument sowie Wakker (1988); Hilton (1989) zur Informationsaversion bei Entscheidungen ohne Interaktion (keine Spiele).

[12] Vgl. etwa Eisenführ/Weber (1994), S.207f.

[13] Zu Konsequenzialismus vgl. Hammond (1988); Machina (1989); Karni/Schmeidler (1991a); (1991b).

[14] Vgl. Karni/Schmeidler (1991a), S. 1786ff; (1991b).

dungsträger gibt, die das Axiom der Reduktion mehrstufiger Lottereien erfüllen und dynamisch konsistent sind, obwohl sie gegen das Unabhängigkeitsaxiom verstoßen.[15] *Schmidt* hat Arbeiten und Beispiele von *Machina* und *Karni/Schmeidler* jüngst anschaulich in deutscher Sprache wiedergegeben.[16]

Die Sinnhaftigkeit der Konsequenzialismus-Annahme wird in der Literatur unterschiedlich beurteilt; sie ist jedoch weit weniger zwingend als die präskriptive Forderung nach dynamischer Konsistenz. Die Aufgabe der Konsequenzialismus-Annahme ist mit einer Nicht-Separierbarkeit der Präferenzen hinsichtlich der Historie von Zwischenzuständen bei mehrstufiger Auflösung verbunden. Für sich genommen ist die Nicht-Separierbarkeit von Präferenzen hinsichtlich gewisser Aspekte nichts Ungewöhnliches. So sind Präferenzen im normalen Risiko-Nutzen-Kalkül nur dann separierbar vom Vermögen des Entscheidungsträgers, wenn er risikoneutral ist oder er eine (andere) konstante absolute Risikopräferenz hat. Ins Feld geführte Schwierigkeiten, die sich aus der wachsenden Komplexität der Kalküle ergeben, sind kein prinzipielles Argument gegen die Berücksichtigung verschiedener Nicht-Separierbarkeiten. *Machina* vergleicht die fehlende Separierbarkeit von Präferenzen und Zwischenzuständen beim Konsequenzialismus mit der Nicht-Separierbarkeit von Konsumpräferenzen über Zeit und hinsichtlich der Bündelung von Gütern. Er argumentiert, dass Konsequenzialismus jedenfalls nicht in jedem Fall gefordert werden kann.[17] Dem schließt sich dieser Beitrag an.

Insgesamt scheint der präskriptive Alleinvertretungsanspruch von subjektiver Erwartungsnutzentheorie und Bernoulli-Prinzip für Entscheidungen unter Unsicherheit nicht gerechtfertigt. Beachtet man außerdem ihre deskriptiven Unzulänglichkeiten, so erscheint die Beschäftigung mit Nichterwartungsnutzentheorien lohnend.

2 Ein wertender Überblick der wichtigsten Modelle

Die naheliegendste Möglichkeit zur Berücksichtigung von Ambiguität besteht darin, dass der Entscheidungsträger Wahrscheinlichkeitsaussagen wiederum subjektiv Wahrscheinlichkeiten zuordnet, sogenannte Wahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung. Dieses Vorgehen bietet jedoch keinerlei Fortschritt zur (direkten) Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten: Ordnet der Entscheidungsträger vagen oder unvollständigen Wahrscheinlichkeitsaussagen solche zweiter oder höherer Ordnung zu, so lassen sich Wahrscheinlichkeiten erster Ordnung mittels „Durchmultiplizieren“ ermitteln. Veränderte Präferenzen gegenüber der unmittelbaren Verwendung des Erwartungsnutzens können so nicht erklärt werden. Die Möglichkeit und Bedeutungslosigkeit von Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung ist ein gängiges Argument gegen Nichterwartungsnutzentheorien. Tatsächlich besagt das Argument lediglich, dass zur Modellierung andere Wege beschritten werden müssen.

Abschnitt 2 diskutiert fünf wichtige Klassen von Nichterwartungsnutzenkalkülen. Neben der Literatur zur Psychologie von Wahrscheinlichkeitsurteilen und Wahlhandlungen

---

[15] Vgl. Machina (1989), S1646ff. Die später vorgenommene Einschränkung des Unabhängigkeitsaxioms auf komonotone Alternativen im CEU-Kalkül und seinen Spezialfällen antizipierter Nutzen und modifiziertes Hurwicz-Kriterium, steht, soviel sei vorweggenommen, nicht im Widerspruch zur (dynamischen) Konsistenz.

[16] Vgl. Schmidt (2002). Er bezeichnet die beschriebenen Entscheidungsträger als „resolut“. Seine Schlussfolgerung, nach der sogenannte „vorausschauende“ Entscheidungsträger existieren, die konsequenzialistisch und dynamisch konsistent sind, aber das Axiom der Reduktion mehrstufiger Lotterien und das Unabhängigkeitsaxiom verletzen, ist zwar plausibel; sie folgt jedoch noch nicht logisch und ohne weiteres aus seinen Ausführungen.

[17] Vgl. Machina (1989), S.1642ff.

und zum Verhalten gegenüber Mehrdeutigkeit in Organisationen werden auch einige Entscheidungskalküle in dieser Darstellung nicht berücksichtigt. Zu diesen gehören vor allem unscharfe Kalküle der fuzzy-set-Theorie, die verbale Berücksichtigung von Ambiguität und die Bildung von Äquivalenzklassen.[18]

2.1 Direkte Veränderung von Wahrscheinlichkeiten und Nutzenvorstellungen

Liegen subjektive Wahrscheinlichkeiten vor, so besteht der einfachste Versuch zur Berücksichtigung von (Allais-artigen) Verstößen gegen die Erwartungsnutzenaxiome in der direkten Adjustierung der Zustandswahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeiten fungieren dabei nicht direkt als Entscheidungsgewichte, sondern werden zuvor verändert. *Fellner* hat schon 1961 vorgeschlagen, unglaubwürdigere Wahrscheinlichkeiten mit einem verminderten Gewicht zu versehen. Auch die bereits erwähnte (nichtkumulative) Prospekt-Theorie von *Kahneman/Tversky* adjustiert Zustandswahrscheinlichkeiten durch eine Gewichtungsfunktion.[19]

Eine direkte Anpassung von Wahrscheinlichkeiten hat jedoch unplausible Implikationen: Angenommen, es liegen zwei Alternativen vor, und die erste führt in einem Zustand mit hoher Ambiguität zu einem relativ schlechten Ergebnis, während das der zweiten für alle Zustände identisch ist. Bei Ambiguitätsaversion sollte die zweite Alternative mit zunehmender Ambiguität des fraglichen Zustandes attraktiver werden. Durch eine Anpassung seiner Wahrscheinlichkeit nach unten würde stattdessen fälschlich die erste Alternative gegenüber der zweiten attraktiver. Dieses Problem ist allen Modellen gemeinsam, die Wahrscheinlichkeiten unmittelbar verändern: durch die direkte Veränderung können stochastisch in erster Ordnung dominierte Alternativen präferiert werden.[20] Bei Einbeziehung präskriptiver Aspekte verbietet sich ihre Verwendung so bereits wegen zwingender statischer Inkonsistenzen.

Für eine direkte Veränderung der Risiko-Nutzen-Funktion gibt es vordergründig einleuchtende Argumente. So wird argumentiert, Ambiguität sei bei vielen Entscheidungsträgern mit Ängsten, Stress und antizipierter Reue verbunden, weshalb ihre Auswirkungen geeignet nur in einer veränderten Risiko-Nutzen-Funktion erfasst werden könnten.[21] Eine Minimierung des nachträglichen Bedauerns wegen „ex post falscher Wahl“ etwa, wie sie *Sarin/Winkler* analog zur Savage-Niehans-Regel des kleinsten Bedauerns formuliert haben, kann zwar empirische Phänomene erklären.[22] Ein rationaler Entscheidungsträger sollte jedoch die Minimierung von „psychischen Kosten“ nicht in den Mittelpunkt seines Entscheidungskalküls stellen: auch ex post wird er noch verstehen, dass er sich ex ante auf Basis unvollständiger Informationen entscheiden musste.

Stärker in der ökonomischen Tradition hat *Krelle* für den Fall der Ungewissheit bereits 1968 vorgeschlagen, neben dem Risikonutzen eines Ergebniswertes auch einen Ungewissheitsnutzen zu betrachten. Die Ungewissheitsaversion eines Entscheidungsträgers übersteigt dabei wie im Ellsberg-Fall in der Regel seine Risikoaversion. *Franke* hat den

---

[18] Vgl. etwa Kahneman/Slovic/Tversky (1982) zu psychologischen Aspekten, March (1988) zu Mehrdeutigkeit in Organisationen, Rommelfanger (1994) und Spengler (1992); (1999) zu fuzzy-Kalkülen, Budescu/Wallsten (1987) zur verbalen Berücksichtigung sowie Chew (1989); Epstein (1992) zur Äquivalenzklassenbildung.

[19] Vgl. Fellner (1961); Kahneman/Tversky (1979). Ähnliche Vorschläge zur direkten Adjustierung gehen auf Einhorn/Hogarth (1985) und auf Kahn/Sarin (1988) zurück.

[20] Vgl. Karni/Schmeidler (1991a), S.1777f.

[21] Vgl. Winkler (1991).

[22] Vgl. Sarin/Winkler (1992) sowie Niehans (1948); Savage (1951) zur Savage-Niehans-Regel.

Ansatz verfeinert und ihm eine Axiomatisierung gegeben.[23] Für eine Modellierung von Entscheidungen unter Ungewissheit ist das Krelle-Modell ein interessanter Ansatz. Wesentlicher Kritikpunkt für diese Anwendung ist die wenig plausible Unterstellung von Pseudowahrscheinlichkeiten, die zur Berechnung eines „erwarteten Ungewissheitsnutzens" erforderlich sind. Das Modell gerät so in die Nähe einer Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zweiter Ordnung. Insbesondere hat der Kalkül die entscheidende Schwäche, sich nur für Entscheidungen unter Ungewissheit zu eignen.

Zusammenfassende Beurteilung: Die unmittelbare Veränderung von Zustandswahrscheinlichkeiten oder Nutzenvorstellungen eignet sich nicht für eine präskriptiv konsistente Modellierung von Verstößen gegen die Erwartungsnutzenaxiome.

2.2 Kalküle zur Maximierung der minimalen Nutzenerwartung

Bei der Maximierung der minimalen Nutzenerwartung sieht sich der Entscheidungsträger nur unter Schwierigkeiten in der Lage, subjektive Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Er verhält sich als vollständiger (relativer) Pessimist bei Ellsberg-artigen Verstößen gegen die Erwartungsnutzenaxiome.

Die Maximierung des minimalen Erwartungsnutzens verallgemeinert das Wald-Prinzip der Maximierung des minimalen Ergebnisses unter Ungewissheit.[24] Die Grundidee besteht darin, dass der Entscheidungsträger zunächst für jeden Zustand eine Menge zulässiger Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Aus diesen konstruiert er dann die Menge gemeinsam zulässiger Zustandsverteilungen. Dabei muss er darauf achten, dass seine Wahrscheinlichkeitsurteile konsistent sind – sonst ergibt sich als zulässig nur die leere Menge. Zu jeder zulässigen Verteilung gehört ein eindeutiger Nutzenerwartungswert jeder Alternative, und zu jeder Menge von Verteilungen eine Menge von Nutzenerwartungen. Die Maximierung der minimalen Nutzenerwartung ist die naheliegende Erweiterung der Maximin-Regel auf den geschilderten Fall: Der Entscheidungsträger wählt dann diejenige Alternative, für die das Minimum, im allgemeinen Fall exakter das Infimum der zulässigen Erwartungswerte maximiert wird.

Dieses Verfahren wird in Anlehnung an *Kofler* und *Menges* als Max E_{Min}-Prinzip bezeichnet. Es wendet als „Bernoullifizierung" der Maximin-Regel diese auf Verteilungen an, die mit der Einschätzung des Entscheidungsträgers verträglich sind[25] und geht dabei vom maximalen Pessimismus (im relativen Sinne *Wakkers*) aus: die Pessimismustendenz wird nur im Vergleich zwischen für möglich gehaltenen Verteilungen eingesetzt. Dieser maximale Pessimismus stellt auch den wesentlichen Kritikpunkt an dem Entscheidungskalkül dar. In der Regel werden nicht beliebige Mengen für die zulässigen Wahrscheinlichkeiten zugelassen. Den wichtigen Fall, dass die zulässigen Verteilungen ein konvexes Polyeder bilden, also durch lineare Ungleichungen beschrieben werden, haben *Kofler* und *Menges* ausführlich untersucht. Sie bezeichnen diesen Fall als lineare partielle Information („LPI"). Zentral für die Lösung des Entscheidungsproblems ist die Matrix der Extremalpunkte des Polyeders.[26] Beispiel 1 illustriert das Max E_{Min}-Prinzip und wird in den folgenden Abschnitten zur Illustration anderer Kalküle verwendet.

Beispiel 1. Relativer Pessimismus maximaler Ausprägung im Max E_{Min}-Prinzip

---

[23] Vgl. Krelle (1968); Franke (1978). Auch Smith (1969) hat den Ansatz einer veränderten Risiko-Nutzen-Funktion verfolgt und eine spezielle Ungewissheits-Nutzen-Funktion vorgeschlagen.

[24] Vgl. Wald (1945).

[25] Vgl. Kofler/Menges (1976) S.73f.

[26] Vgl. Kofler/Menges (1976), S.90ff und S.180ff. Das Max E_{Min}-Prinzip kann auch auf Verteilungen ab einer subjektiven Mindestverlässlichkeit angewandt werden, vgl. Gärdenfors/Sahlin (1982).

Tab. 1. *Max E_{Min}-Prinzip - Entscheidungsmatrix mit Nutzenwerten*

	S_1	S_2	S_3	ungünstigste Verteilung			
$w(S_s)$	$w(S_1)\leq 0{,}6$	$w(S_2)\geq 0{,}1$	$w(S_3)\geq 0{,}2$	S_1	S_2	S_3	E_{Min}
A_1	75	0	- 30	0,0	0,1	0,9	-27,0
A_2	20	100	- 20	0,0	0,1	0,9	- 8,0
A_3	- 20	15	80	0,6	0,2	0,2	7,0

Ein Entscheidungsträger steht vor der durch Tabelle 1 charakterisierten Entscheidung. Die Zustandswahrscheinlichkeiten schätzt er in Form der angegebenen Ungleichungen ein und maximiert seinen minimalen Erwartungsnutzen, das heißt sein (relativer) Pessimismus ist maximal ausgeprägt. Folgerichtig entscheidet er sich für die Wahl von A_3.

Es stellt sich die Frage nach dem axiomatischen Zusammenhang zwischen Max E_{Min}-Prinzip und seinen Präferenzen. *Kofler* und *Menges* haben für den LPI-Fall ein Axiom formuliert, das jeder Alternative die nutzenminimale Lotterie zuordnet. Die Implikationen für die Präferenzordnung bleiben jedoch im Dunkeln, weil das Axiom das Prinzip lediglich technisch verankert. Es muss noch angemerkt werden, dass *Menges* und *Kofler* einer objektivistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung anhängen und das Max E_{Min}-Prinzip wohl eher als Alternative zur subjektiven Erwartungsnutzentheorie sehen.[27] Trotzdem ist die LPI-Theorie mit einer subjektivistischen Interpretation verträglich.

Das umfassendste Modell zur Maximierung der minimalen Nutzenerwartung geht auf *Gilboa* und *Schmeidler* zurück. Sie wenden das Max E_{Min}-Prinzip auf alle konvexen Wahrscheinlichkeitsmengen an, nicht nur auf konvexe Polyeder. Der LPI-Fall ist ein Spezialfall ihrer Untersuchungen, und das Max E_{Min}-Prinzip charakterisieren sie durch eine allgemeinere Axiomatisierung als *Menges* und *Kofler*. Dazu führen sie ein Axiom der Ungewissheitsaversion („uncertainty aversion“) ein, nach dem eine Mischung zweier Alternativen, zwischen denen ein Entscheidungsträger indifferent ist, mindestens so stark präferiert wird wie die Ausgangsalternativen. Dieses Axiom ist verträglich mit der Max E_{Min}-Vorstellung: die minimale Nutzenerwartung einer stochastischen Mischung zweier Alternativen kann nicht geringer sein als ihre gemeinsame minimale Nutzenerwartung vor der Mischung. Das Unabhängigkeitsaxiom muss in der Axiomatisierung von *Gilboa* und *Schmeidler* nur für solche Alternativen erfüllt sein, deren Ausgang sicher ist („certainty independence“).[28]

Zusammenfassende Beurteilung: Die Maximierung des minimalen Erwartungsnutzens modelliert Präferenzen mit maximalem Pessimismus bei Ellsberg-artigen Verstößen gegen die Erwartungsnutzenaxiome. Wegen dieser extremen Pessimismustendenz schränkt sie die Präferenzen für eine umfassende Modellierung zu stark ein.

2.3 Rangabhängige Wahrscheinlichkeitsanpassungen: der „antizipierte Nutzen“

---

[27] Vgl. Kofler/Menges (1976), S.139f.

[28] Das „certainty independence“-Axiom ist auch schwächer als die Beschränkung des Unabhängigkeitsaxioms auf komonotone Alternativen wie in den beiden folgenden Abschnitten diskutiert, vgl. Gilboa/Schmeidler (1989), S.144f; Camerer/Weber (1992), S.345f. Eine konvexe Wahrscheinlichkeitsteilmenge ist dadurch gekennzeichnet, dass mit je zwei Punkten auch die Gerade zwischen diesen Punkten zur Teilmenge gehört. Auf eine weiterführende Diskussion der Konsistenz des Max E_{Min}-Prinzips im allgemeinen Fall wird hier verzichtet, weil das Prinzip bereits wegen seiner extremen Pessimismustendenz verworfen wird. Siehe auch Maccheroni (2002) zu einem dualen Gegenstück des Ergebnisses von Gilboa und Schmeidler für unsichere Nutzenvorstellungen des Entscheidungsträgers.

Wir gehen wieder davon aus, dass der Entscheidungsträger den Zuständen subjektive Wahrscheinlichkeiten klar zuordnen kann – es werden also Allais-artige Verstöße modelliert. Bei rangabhängigen Wahrscheinlichkeitsanpassungen wird die Idee aus 2.1 beibehalten, die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht direkt als Gewichte zu verwenden, sondern eine reelle Funktion zwischenzuschalten, welche diese in Gewichte transformiert. Zentrales Problem der unmittelbaren Veränderung ist, wie diskutiert, der Verstoß der Präferenzordnung gegen das Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung. Hier setzt die rangabhängige Wahrscheinlichkeitsanpassung an: die Transformation der Wahrscheinlichkeiten in die Entscheidungsgewichte erfolgt abhängig von der Rangordnung des Nutzens unter den Zuständen *für jede Alternative*. Mit anderen Worten: die Zustandswahrscheinlichkeiten werden nicht direkt transformiert, sondern die (kumulierte) Verteilungsfunktion des Nutzens jeder Alternative. Durch dieses Vorgehen wird der Verstoß gegen das Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung vermieden.

Das wichtigste Modell rangabhängiger Wahrscheinlichkeitsanpassung ist die Theorie des antizipierten Nutzens, die von *Quiggin* vorgeschlagen wurde. Sie geht von einer Entscheidung unter Risiko mit Alternativen $A_1,...,A_A$ und Zuständen $S_1,\ldots,S_S$ mit den Zustandswahrscheinlichkeiten $w(S_s)$ aus. $s^a_1, s^a_2, \ldots, s^a_S$ bezeichnet die Indexierung der Zustände nach aufsteigenden Nutzen u_{as} für jede Alternative A_a. Die Transformationen erfolgen mittels einer monoton steigenden Funktion $g:[0;1] \rightarrow [0;1]$. Die Präferenzordnung wird entsprechend der Höhe des sogenannten „antizipierten Nutzens" $V_g(A_a)$ der Alternativen gebildet, die durch Gleichung (1) definiert ist[29]

$$V_g(A_a) = \sum_{i=1}^{S} u_{as_i^a} \left[g\left(\sum_{j=1}^{i} w(S_{s_j^a}) \right) - g\left(\sum_{j=1}^{i-1} w(S_{s_j^a}) \right) \right] . \qquad (1)$$

In der eckigen Klammer stehen die transformierten Zuwächse der Nutzengewichte für jeden Sprung der Nutzenverteilungsfunktion jeder Alternative A_a. Wird als g speziell die Identität auf [0;1] gewählt, d.h. gilt g(x)=x, so ergibt sich das Erwartungsnutzenmodell. Je konkaver ihr Verlauf, desto stärker werden die unattraktiven Zustände der Alternativen, und desto schwächer werden ihre attraktiven gewichtet, das heißt desto größer ist der zum Ausdruck gebrachte Pessimismus. Für Optimismus ergibt sich ein analoger Zusammenhang bei konvexem g. Ist g weder konkav noch konvex, sondern etwa umgekehrt S-förmig, so erhält man für verschiedene (kumulierte) Nutzenwerte ein gemischtes Bild. Die Bestimmung von g ist ein wesentliches Problem bei diesem Kalkül.

Die Eigenschaften der Präferenzrelation, die durch die Transformation induziert werden, hängen stark von g ab. Steigt g monoton, so ergibt sich in jedem Fall eine Präferenzordnung, die nicht gegen das Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung verstößt. Wird von nicht-konsequenzialistischen Entscheidungsträgern ausgegangen, so steht die Theorie des antizipierten Nutzens nicht im Widerspruch zu den Kriterien (statischer und dynamischer) präskriptiver Konsistenz. Gegenüber der Erwartungsnutzentheorie liegt ihr ein verändertes Axiomensystem zugrunde, das mit einem abgeschwächten Unabhängigkeitsaxiom auskommt.[30] Beispiel 2 verdeutlicht den Kalkül.

Beispiel 2. Absoluter Pessimismus bei einer Entscheidung nach antizipiertem Nutzen

---

[29] Vgl. Quiggin (1982). Man beachte, dass für die leere Summe von j=1 bis 0 der Wert 0 definiert ist.

[30] Für streng monotones g ist der antizipierte Nutzen ein Spezialfall des CEU-Kalküls. Bei beiden wird das Unabhängigkeitsaxioms auf sogenannte komonotone Alternativen eingeschränkt, vgl. Yaari (1987). Dies wird noch im folgenden Abschnitt zu nicht additiven Kapazitäten diskutiert. Die Aussage zur Konsistenz ergibt sich aus den Ausführungen von Machina (1989), S.1634f, S.1647ff.

Ein pessimistischer Entscheider sieht sich mit der Entscheidung in Tabelle 1 konfrontiert. Er kann Wahrscheinlichkeiten zuordnen, möchte aber entsprechend dem antizipierten Nutzen handeln, wobei er g als Wurzelfunktion wählt, $g(x)=\sqrt{x}$. Er entscheidet sich für Alternative A_2.

Tab. 2. *Antizipierter Nutzen - Entscheidungsmatrix mit Nutzenwerten*

	S_1	S_2	S_3	**Erw.-**	**Gewichte**[31]			
$w(S_s)$	0,45	0,20	0,35	**Nutzen**	S_1	S_2	S_3	**$V(A_a)$**
A_1	75	0	-30	23,25	$\sqrt{1,0}-\sqrt{0,55}$	$\sqrt{0,55}-\sqrt{0,35}$	$\sqrt{0,35}$	1,6
A_2	20	100	-20	22,00	$\sqrt{0,8}-\sqrt{0,35}$	$\sqrt{1,00}-\sqrt{0,80}$	$\sqrt{0,35}$	4,8
A_3	-20	15	80	22,00	$\sqrt{0,45}$	$\sqrt{0,65}-\sqrt{0,45}$	$\sqrt{1}-\sqrt{0,65}$	4,1

Vorläufige Beurteilung: Die Theorie des antizipierten Nutzens steht nicht im Widerspruch zu den Kriterien für präskriptive Konsistenz. Sie modelliert Allais-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome bei Pessimismus und Optimismus unterschiedlicher Intensitäten. Eine zusammenfassende Beurteilung erfolgt in einem Vergleich in Abschnitt 3.

2.4 Kalküle auf Basis nicht additiver Kapazitäten

Seit einiger Zeit hat die Verwendung spezieller nicht additiver Maße, sogenannter Kapazitäten, anstelle von Wahrscheinlichkeiten bei Entscheidungen unter Ambiguität große Bedeutung erlangt. Diese genügen ebenso wie Wahrscheinlichkeitsmaße den Normierungsbedingungen, dass die leere Menge mit 0 und die gesamte Menge mit 1 gemessen wird. Anders als bei Wahrscheinlichkeiten wird jedoch bei ihnen die Vereinigung (endlich oder abzählbar unendlich vieler) disjunkter Mengen nicht notwendig mit der Summe der Maße der Einzelmengen gemessen. Stattdessen gilt nur die schwächere Forderung der Monotonie des Maßes: Teilmengen werden höchstens als so groß gemessen wie ihre Obermengen. Eine Kapazität π auf einer Menge S ist eine reellwertige Abbildung von S auf die Menge der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:[32]

- $\pi(\varnothing) = 0$
- $\pi(S) = 1$
- $T \subseteq T' \Rightarrow \pi(T) \leq \pi(T')$ für alle $T, T' \subseteq S$ *(Monotonie von Kapazitäten).*

In der Rechnung mit Kapazitäten reicht es nicht aus, bei Berechnung des Erwartungswertes die Nutzenwerte der Alternativen in einzelnen Zuständen mit ihren Kapazitäten zu multiplizieren. Stattdessen wird als Präferenzfunktional der sogenannte Choquet-Erwartungswert des Nutzens einer Alternative A_a berechnet, indem zunächst für jede Alternative die Zustände nach absteigenden Nutzenwerten geordnet werden, $u_{a1} \geq u_{a2} \geq \ldots \geq u_{aS}$. Dann berechnet er sich nach folgender Formel:[33]

---

[31] Die Entscheidungsgewichte ergeben sich entsprechend Gleichung (1). $V(A_a)$ ist gerundet.

[32] Vgl. Schmeidler (1989), S.578. Maßtheoretisch müssen Kapazitäten ebenso wie Wahrscheinlichkeiten auf einem Teilmengensystem von S definiert werden. Bei Existenz endlich vieler Zustände - wie hier angenommen - können Maße unproblematisch auf der Potenzmenge definiert werden, der Menge *aller* Teilmengen von S. Bei Existenz unendlich vieler Zustände wäre dies problematisch; man weicht dann auf andere Mengenstrukturen wie σ-Algebren aus. Kapazitäten werden bisweilen als nicht additive *Wahrscheinlichkeits*maße bezeichnet. Da die Definition eines Wahrscheinlichkeitsmaßes die Additivität jedoch bereits impliziert, wird diese Bezeichnung nicht übernommen.

[33] Vgl. Schmeidler (1989). Für i=1 steht in der hinteren runden Klammer eine leere Vereinigung, die

$$CEU_{\pi}(A_a) \quad = \quad \sum_{i=1}^{S} u_{ai} \left[\pi\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j \right) - \pi\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \right) \right] \qquad (2)$$

Auch der Choquet-Erwartungswert ist ein gewichtetes Mittel der Nutzenwerte in den Zuständen. Der maximale Nutzen für eine Alternative wird mit der Kapazität des zugehörigen Zustandes gewichtet, die anderen mit den Differenzen in den eckigen Klammern ähnlich wie beim antizipierten Nutzen. Zur Berechnung der CEU ist also nicht nur die Kenntnis der Kapazitäten einzelner Zustände erforderlich, sondern auch die Kenntnis der Kapazitäten ihrer 2,3,…,(S-1)-fachen Vereinigungen. Ist π ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so ergibt sich als Spezialfall der übliche Erwartungsnutzen.

Die Kapazität π wird als konvex bezeichnet, wenn für je zwei (nicht notwendig disjunkte) Mengen T und U die Ungleichung $\pi(T\cup U) + \pi(T\cap U) \geq \pi(T) + \pi(U)$ gilt. Allein aus den Maßen einzelner Zustände lässt sich gewöhnlich noch nicht erkennen, ob das Maß konvex ist: die $\geq$-Bedingung muss für jedes Paar von Teilmengen von S gelten. So müssen bei drei Zuständen auch die Kapazitäten von (S_1,S_2), von (S_1,S_3) und von (S_2,S_3) verglichen werden.

Konvexe Kapazitäten gewichten attraktive Zustände relativ gering, konkave relativ hoch, das heißt konvexe Kapazitäten korrespondieren mit Pessimismus des Entscheidungsträgers, konkave mit Optimismus. Im Grad der Konvexität oder Konkavität kommen allgemein gesprochen das Vertrauen eines Entscheidungsträgers in sein Wahrscheinlichkeitsurteil und der Grad seines Pessimismus oder Optimismus zum Ausdruck. So können Kapazitäten Informationen über das Vertrauen in ein Urteil repräsentieren, die von Wahrscheinlichkeiten nicht abgebildet werden können.[34] Der größte Teil aller Kapazitäten ist jedoch weder konkav noch konvex. Für solche Kapazitäten existieren Ungleichungsbeziehungen in beiden Richtungen für die Vereinigung unterschiedlicher Zustände. Die genauere Interpretation von Kapazitäten wirft große Schwierigkeiten auf.

Beispiel 3. Entscheidung auf Basis weder konvexer noch konkaver Kapazitäten

Tab. 3. *Entscheidung mit Beispielkapazitäten*[35]*-Entscheidungsmatrix mit Nutzenwerten*

	S_1	**S_2**	**S_3**
$\pi(S_s)$	0,57	0,19	0,47
A_1	75	0	-30
A_2	20	100	-20
A_3	-20	15	80

$\pi(S_1\cup S_2) = 0{,}77$

$\pi(S_1\cup S_3) = 0{,}95$

$\pi(S_2\cup S_3) = 0{,}67$

Ein Entscheidungsträger, der sich gemäß dem CEU-Kalkül verhält, steht vor der Entscheidung, die in Tabelle 3 beschrieben ist, und ordnet den Zuständen die dort angegebenen Kapazitäten zu. Das Maß ist weder konvex noch konkav: es gelten nämlich $\pi(S_1\cup S_2)>\pi(S_1)+\pi(S_2)$, $\pi(S_2\cup S_3)>\pi(S_2)+\pi(S_3)$ und $\pi(S_1\cup S_3)<\pi(S_1)+\pi(S_3)$. Er wählt Alternative A_1, da diese den maximalen CEU aufweist:

---

definitionsgemäß die leere Menge ist, und somit eine Kapazität von 0 hat.

[34] Vgl. Karni/Schmeidler (1991a), S.1803; Eisenführ/Weber (1994), S.348f; Wakker (2001).

[35] Die scheinbar ungewöhnliche Wahl der exemplarischen Kapazitäten dient einer Illustration in 2.5.

$$CEU(A_1) = 75\,(0{,}57 - 0{,}0) + 0\,(0{,}77 - 0{,}57) - 30\,(1{,}0 - 0{,}77) = 35{,}85\,,$$
$$CEU(A_2) = 100\,(0{,}19 - 0{,}0) + 20\,(0{,}77 - 0{,}19) - 20\,(1{,}0 - 0{,}77) = 26{,}00\,,$$
$$CEU(A_3) = 80\,(0{,}47 - 0{,}0) + 15\,(0{,}67 - 0{,}47) - 20\,(1{,}0 - 0{,}67) = 34{,}00\,.$$

Der Entscheidungskalkül mit Kapazitäten beschränkt sich nicht auf Allais-artige oder Ellsberg-artige Verstöße. Vielmehr ist es durch die enorme Reichhaltigkeit der Menge der Kapazitätsmaße möglich, Kombinationen dieser Verstöße in der gleichen Entscheidung zu modellieren, spezifisch etwa für einzelne Zustände und Nutzenausprägungen.[36] Tatsächlich zeigt sich, dass zwischen CEU-Kalkül und Maximierung der minimalen Nutzenerwartung ein enger Zusammenhang besteht: ist eine Kapazität π auf S konvex, so existiert eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen p auf S, die mit π in folgendem Sinne verträglich sind: alle Teilmengen T von S haben unter p eine mindestens so hohe Wahrscheinlichkeit wie unter π.[37]

Der antizipierte Nutzen ist für streng monotones g sogar ein Spezialfall des CEU-Kalküls, und seine Berechnung ist einfach in diesen überführbar: hat man ein Wahrscheinlichkeitsmaß w und eine streng monoton steigende Funktion g, so wird durch $\pi(S_s) = 1 - g(1-w(S_s))$ eine Kapazität definiert. Andererseits ist jedoch nicht klar, ob zu einer gegebenen Kapazität immer auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß und eine Funktion existieren, für die sich die Kapazität in dieser Form darstellen lässt. Tatsächlich ist die Menge aller Kapazitäten so reichhaltig, dass dies nicht immer garantiert ist.[38]

Welche Eigenschaften weisen nun Präferenzordnungen bei Verwendung des CEU-Kalküls auf, und wie ist es axiomatisch fundiert? Die Veränderung zum subjektiven Erwartungsnutzen ist überraschend einfach zu charakterisieren. *Schmeidler* geht zunächst von der Axiomatisierung des subjektiven Erwartungsnutzens nach *Anscombe/Aumann* aus. Wie sie postuliert er eine *stetige, schwache, nichtdegenerierte Präferenzordnung*. Außerdem verwendet er ein unwesentlich abgeschwächtes *Monotonieaxiom*. Die zentrale und einzig substanzielle Abweichung des CEU-Kalküls vom subjektiven Erwartungsnutzen ist hinsichtlich der Axiome die Abschwächung des Unabhängigkeitsaxioms auf sogenannte komonotone Alternativen.[39]

---

[36] Vgl. Wakker (2001).

[37] Diese Menge verträglicher Wahrscheinlichkeitsmaße wird Kern der Kapazität π genannt, $Kern(\pi) = \{ p : p \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S mit } p(T) \geq \pi(T)\ \forall\ T \subseteq S \}$. Folgende drei Bedingungen sind dann äquivalent: (a) die Präferenzrelation auf den Alternativen ist ambiguitätsavers, (b) das Individuum orientiert sich am CEU mit einer konvexen Kapazität π auf S, (c) das Individuum orientiert sich am Max E_{Min}-Prinzip, und die Menge möglicher Wahrscheinlichkeitsmaße stimmt mit dem Kern der Kapazität π überein, vgl. Schmeidler (1989), S.582ff; Karni/Schmeidler (1991a), S.1805f. Ambiguitätsaversion ist dabei im Sinne von Gilboa/Schmeidler (1989) formalisiert. Allerdings existiert nicht zu jeder konvexen Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen eine Kapazität, deren Kern diese Menge ist. Das Max E_{Min}-Prinzip ist also kein Spezialfall des CEU. Wählt man in Beispiel 3 die konvexe Kapazität $\pi_1(S_1)=0{,}0$, $\pi_1(S_2)=0{,}1$, $\pi_1(S_3)=0{,}2$, $\pi_1(S_1 \cup S_2)=0{,}1$, $\pi_1(S_1 \cup S_3)=0{,}2$ und $\pi_1(S_2 \cup S_3)=0{,}4$, so besteht der Kern von π_1 aus den Wahrscheinlichkeiten von Beispiel 1, und die Entscheidungsgewichte sind identisch.

[38] Vgl. Schmeidler (1989), S.585; Karni/Schmeidler (1991a), S.1810. Ersetzt man die Kapazitäten in Beispiel 3 durch (annähernd) $\pi_2(S_1)=0{,}26$, $\pi_2(S_2)=0{,}11$, $\pi_2(S_3)=0{,}19$, $\pi_2(S_1 \cup S_2)=0{,}41$, $\pi_2(S_1 \cup S_3)=0{,}55$ und $\pi_2(S_2 \cup S_3)=0{,}33$, so berechnet man für die Alternativen identische CEU-Werte und antizipierten Nutzen aus Beispiel 2.

[39] Vgl. Anscombe/Aumann (1963); Schmeidler (1989). Nicht-Degeneriertheit bedeutet lediglich, dass nicht alle Alternativen präferiert werden dürfen. Statt streng monotoner Präferenzen wie Anscombe/Aumann fordert Schmeidler nur einfache Monotonie: wird eine Alternative in jedem Zustand präferiert, dann auch insgesamt.

Bekanntlich fordert die subjektive Erwartungsnutzentheorie die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms generell, das heißt für alle Kombinationen dreier Alternativen. Im CEU-Kalkül wird die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms nur für Tripel paarweise komonotoner Alternativen gefordert. Zwei Alternativen A_a und A_b sind komonoton, wenn sie die Zustände in die gleiche Nutzenrangfolge bringen. Für je zwei Zustände S_r und S_s sind dann die zugehörigen Nutzenwerte unter dem gleichen Zustand größer, das heißt es gilt $u_{ar} > u_{as} \Rightarrow u_{br} > u_{bs}$. Sind zwei Alternativen *nicht* komonoton, zeigen sie also ein unterschiedliches Monotonieverhalten des Nutzens auf den Zuständen, so kann ihre geeignete stochastische Mischung stets zu einer Reduktion der Nutzenvariation über die Zustände führen; die Alternativen *„hedgen"* sich in diesem Sinne gegenseitig. Im Extremfall könnte durch eine geeignete Mischung etwa ein konstanter Nutzen erzeugt werden. In *Ellsbergs* Dreifarbenproblem findet ein solches „hedging" durch Beimischung einer nicht komonotonen Alternative zu den beiden Ursprungsalternativen statt, und die Präferenzen ändern sich als Folge der Ambiguitätsaversion.[40]

Schmeidlers Axiomatisierung fordert die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms genau für je drei paarweise komonotone Alternativen. Diese Abschwächung lässt also genau dann Verstöße gegen das Axiom zu, wenn ein „hedging-Effekt" vorliegen kann. Ist dieser Effekt ausgeschlossen, das heißt bei je drei paarweise komonotonen Alternativen, so wird die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms weiterhin gefordert. Insgesamt besteht die einzig wesentliche Änderung zum subjektiven Erwartungsnutzen in dieser Abschwächung. Die Rationalität dieses zusätzlichen Freiheitsgrades für Präferenzordnungen besteht darin, Verstöße genau dann zuzulassen, wenn sie durch „hedging" unter Ambiguität, Pessimismus oder Optimismus verursacht werden können.

Der CEU-Kalkül basiert auf transitiven Präferenzen und verstößt ebenso wie der antizipierte Nutzen nicht gegen das Prinzip der stochastischen Dominanz erster Ordnung. Neben dieser statischen Konsistenz besteht für nicht-konsequenzialistische Entscheidungsträger auch kein Widerspruch zu den Kriterien der dynamischen Konsistenz.[41] Mittlerweile wurden verschiedene Erweiterungen des CEU-Modells vorgeschlagen. Schon die Verwendung der Kapazitäten im Grundmodell ist jedoch so kompliziert, umfassend und schwierig zu interpretieren, dass sich eher die Frage nach einer Vereinfachung als nach einer weiteren Verkomplizierung aufdrängt.[42]

Vorläufige Beurteilung: Der CEU-Kalkül basiert auf einer klaren Axiomatisierung und steht nicht im Widerspruch zu den Kriterien für präskriptive Konsistenz. Sein Anwendungsbereich ist sehr umfassend: er kann Allais-artige und Ellsberg-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome in unterschiedlichen Intensitäten gleichzeitig modellieren. Die Schwäche des Kalküls liegt in der unklaren und schwierigen Interpretation der Kapazitäten sowie in seiner aufwändigen Anwendung, die unrealistisch hohe Anforderungen an den Entscheidungsträger stellt. Eine zusammenfassende Beurteilung erfolgt in einem Vergleich in Abschnitt 3.

2.5 Ein Kalkül auf Basis unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten

Bisher wurden für ausschließlich Allais-artige Verstöße der antizipierte Nutzen und für

---

[40] Vgl. Schmeidler (1989), S.582f; Camerer/Weber (1992), S.348f.

[41] Die Aussage zur Konsistenz ergibt sich mit den Argumenten von Machina (1989), S.1634f, S.1647ff.

[42] Eine Verallgemeinerung des CEU-Kalküls haben Tversky/Kahneman (1992) mit ihrer kumulativen Prospekt-Theorie vorgeschlagen. Sie befreit die ursprüngliche Version von der Problematik der Wahl stochastisch dominierter Alternativen. Andere Erweiterungen sind der Ansatz der „revealed likelihoods" von Sarin/Wakker (1998), und die jüngsten Überlegungen von Epstein/Zhang (2001), die sogenannte Dynkin-Systeme als Mengenstrukturen für Maße vorschlagen.

lediglich Ellsberg-artige die Maximierung der minimalen Nutzenerwartung vorgestellt, dem jedoch eine übertriebene Pessimismustendenz inhärent ist. Liegen beide Arten von Verstößen gleichzeitig vor, so lässt sich die Präferenzstruktur durch den CEU-Kalkül geeignet beschreiben. Nun wird ein einfacher Kalkül für ausschließlich Ellsberg-artige Verstöße vorgestellt, der den Pessimismus-Mangel des Max E_{Min}-Prinzips behebt. Grundidee ist die Verallgemeinerung des bekannten Hurwicz-Kriteriums für Entscheidungen bei Ungewissheit auf den Fall unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten, analog der Verallgemeinerung des MaxMin-Prinzip von *Wald* zum Max E_{Min}-Prinzip. Als Präferenzfunktional wird eine Konvexkombination des minimalen und des maximalen Gewinnerwartungswertes gewählt, der mit den zulässigen Wahrscheinlichkeiten kompatibel ist. Dabei stellt sich heraus, dass es sich nicht nur um eine plausible Verallgemeinerung handelt, sondern dass das modifizierte Hurwicz-Kriterium ein Spezialfall des komplizierteren Choquet-Erwartungsnutzen-Kalküls und seiner plausiblen Axiomatisierung bei Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten ist.

Für den Fall der Ungewissheit, also vollständigen Fehlens von Wahrscheinlichkeitsurteilen, haben *Arrow* und *Hurwicz* gezeigt, dass unter plausiblen Präferenzaxiomen für jede Alternative die Einbeziehung des minimalen und maximalen Zustandsergebnisses für die Bestimmung der Präferenzordnung ausreicht. Es werden dann nur solche Alternativen präferiert, deren Intervall zwischen diesem Minimum und Maximum nicht durch andere Alternativen in dem Sinne dominiert wird, dass sowohl Minimum als auch Maximum der dominanten Alternative rechts von den entsprechenden Werten der dominierten liegen. Existiert eine solche dominante Alternative, so wird diese stets präferiert. Das bekannte Hurwicz-Kriterium unter Ungewissheit, das als Präferenzfunktional eine Konvexkombination dieser Extremwerte mit einem Pessimismus-Parameter $\lambda \in [0;1]$ benutzt, gewährleistet eine dementsprechende Präferenzordnung.[43]

Ungewissheit ist der Spezialfall unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten, bei dem sämtliche unteren Wahrscheinlichkeiten 0 und sämtliche oberen 1 sind. Es bietet sich an, das Hurwicz-Kriterium modifiziert auf die Erwartungsnutzenintervalle des allgemeinen Falles unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten auszudehnen. $E_{Min}(U(A_a))$ und $E_{Max}(U(A_a))$ bezeichnen den minimalen und maximalen Erwartungsnutzen, die mit den unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten verträglich sind. Dabei können analog zu *Arrow* und *Hurwicz* nur solche Alternativen A_i präferiert werden, deren Erwartungsnutzenintervalle nicht in dem Sinne dominiert werden, dass sowohl ihre untere als auch ihre obere Grenze kleiner ist als die einer zweiten Alternative A_j. Dann ist das Präferenzfunktional für jede Alternative definiert als:

$$H_\lambda(A_a) \;:=\; \lambda \times E_{Min}(U(A_a)) \;+\; (1-\lambda) \times E_{Max}(U(A_a)) \qquad (3)$$

Bei der Bestimmung des reellen Parameters λ können sich einige Schwierigkeiten ergeben; jedoch ist λ klar interpretierbar. Für $\lambda=1$ ergibt sich offenbar das Max E_{Min}-Prinzip. Fallen untere und obere Wahrscheinlichkeiten zusammen, so gilt dies auch für die Erwartungsnutzenintervalle, und es ergibt sich der Erwartungsnutzenkalkül.[44]

---

[43] Vgl. Arrow/Hurwicz (1972), die unter Ungewissheit hierdurch eine schwache Ordnung definieren.

[44] Auch Menges und Kofler haben für den LPI-Fall, der untere und obere Wahrscheinlichkeiten umfasst, bei objektivistischer Interpretation das modifizierte Hurwicz-Kriterium als Alternative zum Max E_{Min}-Prinzip vorgeschlagen, allerdings ohne Axiomatisierungsbezug, vgl. Kofler/Menges (1976).

Beispiel 4. Modifiziertes Hurwicz-Kriterium bei relativem Pessimismus und Optimismus

Tab. 4. *Modifiziertes Hurwicz-Kriterium - Entscheidungsmatrix mit Nutzenwerten*

	S_1	**S_2**	**S_3**	**ungünstigste Vtlg.**				**günstigste Vtlg.**			
$w(S_s)\in$	[0,3;0,6]	[0,1;0,2]	[0,2;0,5]	S_1	S_2	S_3	**E_{Min}**	S_1	S_2	S_3	**E_{Max}**
A_1	75	0	- 30	0,3	0,2	0,5	7,5	0,6	0,2	0,2	39,0
A_2	20	100	- 20	0,4	0,1	0,5	8,0	0,6	0,2	0,2	28,0
A_3	- 20	15	80	0,6	0,2	0,2	7,0	0,3	0,2	0,5	37,0

Ein Entscheidungsträger ordnet den Zuständen untere und obere Wahrscheinlichkeiten zu und steht vor der durch Tabelle 4 charakterisierten Entscheidung. Günstigste und ungünstigste Verteilungen sowie E_{Min} und E_{Max} für jede Alternative berechnet man leicht. A_3 kann offenbar gegenüber A_1 für kein λ präferiert werden. Jede Alternative erhält für ein λ eine Verteilung und somit Entscheidungsgewichte, die eine Konvexkombination aus bester und schlechtester Verteilung sind. Man sieht, dass A_1 für $\lambda\leq 22/23$ optimal ist, und nur recht pessimistische Entscheidungsträger mit $\lambda\geq 22/23$ bevorzugen A_2. Das Beispiel verdeutlicht auch eine wichtige Eigenschaft des modifizierten Hurwicz-Kriteriums: es können Alternativen präferiert werden, die für keine zulässige Verteilung erwartungsnutzenoptimal sind, aber dennoch den besten „Optimismus-Pessimismus-Kompromiß“ darstellen. Wäre dies nicht möglich, so würde H_λ offenbar niemals Präferenzordnungen induzieren, die nicht auch durch die Erwartungsnutzentheorie hätten zustande kommen können.[45] Wählt man speziell λ=0,1, so ergeben sich Entscheidungsgewichte, die mit den Gewichten des Choquet-Erwartungsnutzens aus Beispiel 3 übereinstimmen.[46] Es ist kein Zufall, dass dies funktioniert:

Tatsächlich ist das modifizierte Hurwicz-Kriterium nämlich sehr viel allgemeingültiger, als es zunächst den Anschein hat. Es zeigt sich nämlich, und dieses Ergebnis ist in der Literatur nach Kenntnis des Autors noch unbekannt, dass das modifizierte Hurwicz-Kriterium bei Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten ein wichtiger Spezialfall des CEU-Kalküls ist. Es gilt nämlich folgender Zusammenhang:[47]

Bei Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten genügt das modifizierte Hurwicz-Kriterium, also jede durch (3) induzierte Präferenzordnung, der Axiomatisierung Schmeidlers. Insbesondere ist das Unabhängigkeitsaxioms (zumindest) für komonotone Alternativen gültig. Als Spezialfall des CEU-Kalküls erfüllt das modifizierte Hurwicz-Kriterium die Kriterien für statische Konsistenz. Bei nicht-konsequenzialistischen Entscheidungsträgern besteht auch kein Widerspruch zu den Kriterien dynamische Konsistenz. Damit erweist sich der Fall unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten mit dem modifizierten Hurwicz-Kriterium als gesuchter Spezialfall des CEU für rein Ellsberg-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome.

---

[45] A_2 ist solch eine Alternative, wie man sich mittels der Extremalpunkte leicht überlegt. Analog lassen sich beide Probleme Ellbergs einfach mit geeignetem λ ohne Auftreten einer Paradoxie modellieren.

[46] Für A_1 bei S_1 0,1×0,3+0,9×0,6=0,57, sowie 0,2 und 0,23 für S_2 und S_3. Für A_2 0,58, 0,19 und 0,23 sowie für A_3 0,33, 0,2 und 0,47 – also gerade die Werte der Gewichte in Klammern von Beispiel 3.

[47] Die Formulierung als Theorem und eine Beweisskizze finden sich im Anhang. Insbesondere beinhaltet die Menge präferierter Alternativen stets nicht dominierte; dominierte Alternativen werden nie streng präferiert. Auch Montesano (2001) und Ghirardato (2001) behandeln den Fall unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten. Ghirardato entwickelt eine eigene Axiomatisierung, in der er das Hurwicz-Kriterium verallgemeinert, jedoch ohne die Parallele zu Schmeidlers Axiomatisierung zu zeigen.

Der Beweis (siehe Anhang) basiert auf folgender Grundidee: Für jeden Zustand und jede Menge von Zuständen existieren ein minimales und ein maximales zulässiges, das heißt mit den unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten verträgliches Maß. Dieses Minimum (Maximum) unter allen zulässigen Maßen ist eine konvexe (konkave) Kapazität. Die Konvexkombination dieser beiden Kapazitäten mit dem Pessimismusparameter λ bildet ihrerseits eine Kapazität. Der Choquet-Erwartungsnutzen eben dieser Kapazität stimmt bei identischem λ stets mit dem Wert des Präferenzfunktionals H_λ für das modifizierte Hurwicz-Kriterium überein. Wesentlich hierfür ist die Eigenschaft des Choquet-Erwartungswertes, dass er für konvexe (konkave) Kapazitäten gerade das Erwartungswertfunktional unter den zugehörigen, zulässigen Verteilungen minimiert (maximiert).

Das Ergebnis lässt sich folgendermaßen veranschaulichen: Zunächst wird die Untersuchung der Alternativen auf die Nutzenerwartungen reduziert, das heißt in diesem Fall auf die Erwartungsnutzenintervalle. Tatsächlich existieren für jeden Erwartungsnutzen in dem Intervall auch zulässige Verteilungen, die diesen erzeugen. Eine Verdichtung auf eine Zahl muss linear in den Intervallendpunkten sein, damit sie mit einer fundamentalen Eigenschaft des Risikonutzens im Sinne *von Neumanns* und *Morgensterns* verträglich ist, die auch der CEU-Kalkül verwendet: der Invarianz der Präferenzordnung gegen positive Skalierungen (Multiplikation mit einem positiven Faktor). Jede nicht (positiv) lineare Funktion der beiden Endpunkte könnte nämlich bei Multiplikation aller Nutzenwerte mit einer geeigneten positiven Konstante die Rangfolge der Alternativen hinsichtlich des Präferenzfunktionals verändern. Eine Normierung eines beliebigen positiven Funktionals führt andererseits automatisch auf das modifizierte Hurwicz-Kriterium.

Exkurs zur Interpretation unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten

Entgegen einem weitverbreiteten Glauben sind untere und obere Wahrscheinlichkeiten kompatibel mit der üblichen Wahrscheinlichkeitsauffassung. Vermag ein Entscheidungsträger Zustandswahrscheinlichkeiten nur unter Schwierigkeiten zuzuordnen, dann ist ihr Vorliegen nicht ungewöhnlich: Die übliche Formalisierung von Wahrscheinlichkeiten geht auf *Kolmogoroff* zurück, der diese als reellwertige Abbildung auf einem Mengensystem definiert hat. Definitionsgemäß ist die Wahrscheinlichkeit einer abzählbaren Vereinigung disjunkter Mengen gleich der Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten. Insbesondere macht diese Axiomatisierung als abstraktes, mathematisches Gebilde keine Aussage über eine Interpretation als subjektive oder objektive Wahrscheinlichkeit.[48] Für überabzählbare Grundmengen wirft nun der Versuch, *alle* Teilmengen zu messen, unlösbare Probleme auf. So lässt sich zeigen, dass kein verallgemeinertes Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge des reellen Einheitsintervalls [0;1] existiert, das jedes Intervall [a;b] mit seiner Länge b-a misst. Im Formalismus muss deshalb ein Teilmengensystem eingeführt werden, das statt aller nur die normalerweise interessierenden Mengen misst: die σ-Algebra. Sie enthält zumindest leere Menge und Grundmenge, mit jeder Menge auch ihr Komplement, und mit jeder abzählbaren Anzahl von Mengen auch deren Vereinigung.[49]

Es können also stets auch Mengen existieren, denen keine Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können; diese werden als *nicht messbar* bezeichnet. Der Entscheidungsträger kann nach der Axiomatik trotzdem Aussagen über untere und obere Wahrschein-

---

[48] Vgl. Kolmogoroff (1933) zur Axiomatisierung und Gottinger (1974) zu ihrer Verträglichkeit mit objektivistischer und subjektivistischer Sicht. Savage verbindet bei der Gegenüberstellung objektiver und subjektiver Wahrscheinlichkeiten die an gleicher Stelle angesprochene Axiomatisierung Kolmogoroffs mit keinem der Konzepte vorzugsweise, vgl. Savage (1954), S.3f.

[49] Vgl. etwa Behnen/Neuhaus (1987), S.140 zur Unmöglichkeit und Bauer (1990), S.3 zu σ-Algebren.

lichkeit solcher nicht messbarer Mengen machen: jede Teilmenge wird höchstens mit dem gleichen Maß gemessen wie ihre Obermengen. Analog ist die Wahrscheinlichkeit jeder messbaren Menge eine untere Schranke für ihre Obermengen. Für eine Konsistenz ist nur erforderlich, dass ein Individuum Komplemente und Vereinigungen abzählbar vieler, disjunkter Teilmengen bewerten kann, *deren Wahrscheinlichkeiten es kennt*.

Ein Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten bedeutet in der Wahrscheinlichkeitsaxiomatik lediglich, dass die Zustände nicht in der Menge der für den Entscheidungsträger subjektiv messbaren Mengen sind. Dies ist die natürliche Modellierung von Ellsberg-artiger Ambiguität innerhalb der normalen Wahrscheinlichkeitsaxiomatik.

Es existiert eine gut ausgearbeitete Theorie, die sich mit oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten sowie ihrer Bestimmung beschäftigt: Die Evidenztheorie von *Dempster* und *Shafer*. Untere Wahrscheinlichkeiten werden in ihr als Glaubwürdigkeiten („beliefs“) und obere als Plausibilitäten („plausibilities“) bezeichnet. Beide sind Kapazitäten, wobei Glaubwürdigkeiten konvex und Plausibilitäten konkav sind. Besonders im Bereich der künstlichen Intelligenz wird diese Theorie mit großem Erfolg eingesetzt.[50] Trotz der großen Bedeutung von unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten für Entscheidungskalküle bei Ambiguität, die sich schon aus *Ellsbergs* Beispiel ergibt, und die nicht zuletzt in ihrer klaren und einfachen Interpretation begründet liegt, findet dieser Ansatz im Vergleich zu den anderen dargestellten bislang noch überraschend wenig Beachtung.[51] Dies liegt vermutlich nicht zuletzt daran, dass eine einfache axiomatische Verankerung wie die hier gegebene bislang nicht vorlag.

Vorläufige Beurteilung: Das modifizierte Hurwicz-Kriterium bei unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten steht nicht im Widerspruch zu den Kriterien für präskriptive Konsistenz. Es ist ein Spezialfall des CEU-Kalküls und gehorcht somit den Bedingungen von dessen klarer Axiomatisierung. Der Kalkül modelliert ausschließlich Ellsberg-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome in unterschiedlichen Intensitäten. Er ist einfach anzuwenden, klar zu interpretieren und stellt Anforderungen an den Entscheidungsträger, die über die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten nicht wesentlich hinaus gehen. Eine zusammenfassende Beurteilung erfolgt in einem Vergleich in Abschnitt 3.

3 Resümee: eine direkte Gegenüberstellung

Je nach Art der Abweichungen gegenüber den Annahmen der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens wurden drei flexible Entscheidungskalküle beschrieben, die durch vernünftige Axiomensysteme abgesichert sind, und die insbesondere den Kriterien für präskriptive Konsistenz nicht widersprechen. Für ihre Verwendung wurde ein einfacher Bezugsrahmen entsprechend der Art dieser Abweichungen entwickelt:

- *Fall 1*: Sollen nur Ellsberg-artige Verstöße zugelassen werden (Ambiguität mit relativem Pessimismus oder Optimismus), so eignet sich das modifizierte Hurwicz-Kriterium mit Bestimmung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten.
- *Fall 2*: Sollen ausschließlich Allais-artige Verstößen möglich sein, dann bietet sich der Kalkül des antizipierten Nutzens an.

---

[50] Die Ursprungsarbeit ist Dempster (1967). Weiterführende Darstellungen finden sich etwa in Yager/Kacprzyk/Fedrizzi (1994). Die Auffassung als untere und obere Wahrscheinlichkeiten entspricht Dempsters ursprünglicher, ist jedoch heute in der einschlägigen Literatur eher unüblich.

[51] Billot diskutiert die Verwendung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Entscheidungen unter Ambiguität allgemein, vgl. Billot (1991).

- *Fall 3*: Sollen sowohl Elemente von Ellsberg- als auch von Allais-artigen Verstößen erlaubt werden, so kann auf den CEU-Kalkül zurückgegriffen werden.

Vergleicht man die Eigenschaften der Kalküle direkt miteinander, so ergibt sich insgesamt folgendes Bild: die Axiomatisierung garantiert für alle drei Kalküle die Einhaltung des Unabhängigkeitsaxioms für komonotone Alternativen; in diesem Beitrag wurde dies für Fall 1 gezeigt. Damit sich eine Erweiterung des Erwartungsnutzenkalküls außerdem für die Modellierung und hoffentlich auch für die Praxis eignet, sollten zumindest drei *Praktikabilitätsanforderungen* erfüllt sein:

- Der Kalkül sollte *einfach anwendbar* sein, also insbesondere keine übertriebenen Anforderungen an den Entscheidungsträger stellen.
- Er sollte hinsichtlich Annahmen und Ergebnissen *klar interpretierbar* sein.
- Er sollte möglichst *gut kompatibel mit der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens* sein, um die Stringenz mit seinen Modellen und Ergebnissen zu sichern.

Es verwundert wenig, dass der CEU-Kalkül als allgemeinster und umfassendster der drei Kalküle diese Praktikabilitätsanforderungen am wenigsten erfüllt. Es dürfte außerdem deutlich geworden sein, dass das modifizierte Hurwicz-Kriterium ihnen am besten gerecht wird. Die deskriptive Verbesserung gegenüber der Erwartungsnutzentheorie wird, und eine solche Einschätzung ist zwangsläufig subjektiv, kaum durch Verschlechterung der Praktikabilität erkauft. Verglichen mit den Anforderungen, welche die Bestimmung einer ganzen reellen Funktion g beim antizipierten Nutzen oder gar die Bestimmung einer Kapazität π im CEU-Kalkül aufwirft, sind Bestimmung und Interpretation eines reellen Parameters ein bewältigbares Problem. Schließlich, und diese Einschätzung mag mancher anders treffen, scheinen Ellsberg-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzentheorie im Vergleich zu Allais-artigen sowohl fundamentaler als auch mit der üblichen Axiomatisierung von Wahrscheinlichkeiten besser vereinbar.[52]

Dieser Beitrag trägt den Untertitel „ein Plädoyer für die Verwendung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten“, und das Plädoyer erfolgt gleichzeitig für eine Verwendung des modifizierten Hurwicz-Kriteriums. Es beruht auf drei Argumenten:

- Die Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens weist deskriptive Schwachstellen auf, die einer Verbesserung bedürfen. Die Verwendung unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten mit dem modifizierten Hurwicz-Kriterium leistet eine Verbesserung für eine wichtige Klasse von Verstößen, nämlich für Ellsberg-artige.
- Das modifizierte Hurwicz-Kriterium ist bei Vorliegen unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten präskriptiv vernünftig und gehorcht sinnvollen Axiomen.
- Der Kalkül ist außerdem praktikabel, das heißt er ist einfach anwendbar, klar interpretierbar, und gut kompatibel mit der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens.

Anhang

Es liegen endlich viele Alternativen $A_1,..., A_A$ und endlich viele Umweltzustände $S_1,..., S_S$ mit unteren Wahrscheinlichkeiten p^l_s und oberen p^u_s vor, $0 \le p^l_s \le p^u_s \le 1$ für alle s=1,..., S. Der Nutzen von Alternative A_a in Zustand S_s beträgt u_{as}. Die Menge zulässiger Verteilungen ist dann definiert als

[52] Ein Beispiel für eine andere Einschätzung ist Wakker (2001).

$$P_Z := \left\{ (p_1,..., p_S):\ p_i \in \left[p_i^l ; p_i^u\right] \forall\ i = 1,..., S\ \wedge\ \sum_{i=1}^{S} p_i = 1 \right\}\ . \tag{A1}$$

Minimale und maximale Nutzenerwartungen der Alternativen sind dann

$$E_{Min}\left(U(A_a)\right) := \inf_{p \in P_Z} \left[\ E_p\left(U(A_a)\right)\ \right] \tag{A2}$$

und

$$E_{Max}\left(U(A_a)\right) := \sup_{p \in P_Z} \left[\ E_p\left(U(A_a)\right)\ \right]\ , \tag{A3}$$

wobei $E_p(\cdot)$ allgemein den Erwartungswert einer Zufallsvariablen bei Vorliegen von Verteilung p bezeichnet. Für jede Alternative A_a liegen die Nutzenerwartungswerte also im Intervall [$E_{Min}(U(A_a))$; $E_{Max}(U(A_a))$]. Tatsächlich kommen alle Werte im Intervall auch als Erwartungsnutzen zulässiger Verteilungen vor.

Für Teilmengen T möglicher Umweltzustände, $T \subseteq \{ S_1, ..., S_S \}$, werden folgende Maße definiert:

$$\pi_l(T) := \inf_{p \in P_Z} \{ p(T) \} \tag{A4}$$

$$\pi_u(T) := \sup_{p \in P_Z} \{ p(T) \} \tag{A5}$$

$$\pi_\lambda(T) := \lambda \times \pi_l(T) + (1-\lambda) \times \pi_u(T) \tag{A6}$$

$\pi_l(T)$ ist also die kleinste, $\pi_u(T)$ die größte zulässige Wahrscheinlichkeit für die Zustandsmenge T. Im allgemeinen sind diese beiden Maße ebenso wie $\pi_\lambda(T)$ keine Wahrscheinlichkeitsmaße. Mit diesen Bezeichnungen sowie denen aus den Abschnitten 2.4 und 2.5 gilt folgendes Theorem:

THEOREM: Bei einem Entscheidungsproblem mit endlichen vielen Alternativen und Zuständen liegen untere und obere Wahrscheinlichkeiten vor. Für einen reellen Parameter $\lambda \in [0;1]$ und mit den Bezeichnungen (A1) bis (A6), (2) und (3) gilt dann

(a) π_l ist eine konvexe Kapazität
π_u ist eine konkave Kapazität
π_λ ist eine Kapazität.

(b) Der Choquet-Erwartungsnutzen der Kapazität π_λ stimmt bei identischem λ mit dem Präferenzfunktional des modifizierten Hurwicz-Kriteriums überein, d.h. es gilt für alle Alternativen A_a, a=1, ..., A:

$$CEU_{\pi_\lambda}\left(A_a\right) = H_\lambda(A_a)$$

(c) Durch H_λ wird eine Präferenzordnung auf der Alternativenmenge $\{A_1,...,A_A\}$ induziert, die den Axiomen von Schmeidler (1989) genügt.

Beweisskizze - Der vollständige Beweis der Aussage findet sich in *Lindstädt* (2002).

(zu a) π_l und π_u sind offenbar Kapazitäten, vgl. auch *Ott* (2001), S.63f, demnach also ebenfalls π_λ. Die Konvexität von π_l zeigt *Schmeidler* (1986), S.260. Die Konkavität von π_u ergibt sich analog. Damit ist (a) gezeigt.

(zu b) Wesentlich ist die CEU-Eigenschaft, dass die Gewichte des Choquet-Erwartungswertes von π_l eine zulässige Verteilung bilden, die das Erwartungsnutzenfunktional minimiert, während analog die Gewichte von CEU_{π_u} das Erwartungsnutzenfunktional unter den zulässigen Verteilungen maximieren. Dies zeigt man so: wähle $\forall$ i=1,...,S

$$\tilde{p}_i := \inf_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right\} - \inf_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right\} \quad , \quad \hat{p}_i := \sup_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right\} - \sup_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right\}.$$

Dann lässt sich durch Widerspruch zeigen, dass $\forall$ a=1,...,A gilt:

$$\sum_{i=1}^{S} \tilde{p}_i u_{ai} \overset{!}{=} \inf_{p\in P_Z}\left\{\sum_{i=1}^{S} p_i u_{ai}\right\} = E_{Min}(U(A_a)), \quad \sum_{i=1}^{S} \hat{p}_i u_{ai} \overset{!}{=} \sup_{p\in P_Z}\left\{\sum_{i=1}^{S} p_i u_{ai}\right\} = E_{Max}(U(A_a)).$$

Daraus folgt insbesondere $\forall$ $\lambda\in[0;1]$, a=1,...A:

$$\begin{aligned}
H_\lambda(A_a) &= \lambda \times \sum_{i=1}^{S} \tilde{p}_i u_{ai} + (1-\lambda) \times \sum_{i=1}^{S} \hat{p}_i u_{ai} \\
&= \lambda \times \sum_{i=1}^{S} u_{ai} \left[\inf_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right\} - \inf_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right\} \right] \\
&\quad + (1-\lambda) \times \sum_{i=1}^{S} u_{ai} \left[\sup_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right\} - \sup_{p\in P_Z}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right\} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{S} u_{ai} \left[\lambda\pi_l\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j\right) + (1-\lambda)\pi_u\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j\right) - \lambda\pi_l\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j\right) - (1-\lambda)\pi_u\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j\right) \right] \\
&= CEU_{\lambda\pi_l + (1-\lambda)\pi_u}(A_a) = CEU_{\pi_\lambda}(A_a)
\end{aligned}$$

Damit ist (b) gezeigt.

(zu c) Aus der Gleichheit der Präferenzfunktionale, die in (b) bewiesen wurde, folgt (c) unmittelbar, weil nach *Schmeidler* (1989) die Präferenzen, die das Funktional CEU_{π_λ} induziert, seiner Axiomatisierung gehorchen.

Damit ist das Theorem bewiesen.

Literatur

Allais, Par M. (1953), Le Comportement De L'Homme Rationel Devant Le Risque: Critique Des Postulats et Axiomes de L'Ecole Americaine, in: Econometrica, Vol. 21, 4/1953, S. 503 – 546.

Anscombe, Francis J./Aumann, Robert J. (1963), A Definition of Subjective Probability, in: Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, S. 199 – 205.

Arrow, Kenneth J./Hurwicz, Leonid (1972), Optimality Criterion for Decision Making under Ignorance, in: Carter, C. F./Ford, J. L. (eds.), Uncertainty and Expectations in Economics, S. 1 – 11.

Bauer, Heinz (1990), Maß- und Integrationstheorie

Behnen, Konrad/Neuhaus, Georg (1987), Grundkurs Stochastik

Billot, Antoine (1991), Cognitive Rationality and Alternative Belief Measures, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 4, S. 299 - 324.

Budescu, David V./Wallsten, Thomas S. (1987), Subjective Estimation of Vague and Precise Uncertainties, in: Wright, G./Ayton, P. (Hrsg.), Judgmental Forecasting, S.63 - 82.

Camerer, Colin/Weber, Martin (1992), Recent Developments in Modeling Preferences, Uncertainty and Ambiguity, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 5, S.325 - 370.

Chew, Soo H. (1989), Axiomatic Utility Theories with the Betweenness Property, in: Annals of Operations Research, Vol. 19, S. 273 – 298.

Curley, Shawn P./Yates, J. Frank/Abrams, Richard A. (1986), Psychological Sources of Ambiguity Avoidance, in: Organizational Behavior and Human Decision Processes, Vol. 38, S. 230 - 256.

Dempster, Arthur (1967), Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, in: Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, S. 325 - 339.

Einhorn, Hillel J./Hogarth, Robin M. (1985), Ambiguity and Uncertainty in Probabilistic Inference, in: Psychological Review, Vol. 92, 4/1985, S. 429 - 461.

Einhorn, Hillel J./Hogarth, Robin M. (1986), Decision Making under Ambiguity, in: Hogarth, R. M./Einhorn, H. J. (Hrsg.), Rational Choice, S. 41 - 66.

Eisenführ, Franz/Weber, Martin (1994), Rationales Entscheiden, 2. Aufl. 1994

Ellsberg, Daniel (1961), Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, S. 643 - 669.

Epstein, Larry G. (1992), Behavior under Risk: Recent Developments in Theory and Applications, in: Laffont, J. (Hrsg.), Advances in Economic Theory

Epstein, Larry G./Zhang, Jiankang (2001), Subjective Probabilities on Subjectively Unambiguous Events, in: Econometrica, Vol. 69, No.2 , S. 265 – 306.

Fellner, William (1961), Distortion of Subjective Probabilities as a Reaction to Uncertainty, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 75, S. 670 - 694.

Fox, Craig R./Tversky, Amos (1995), Ambiguity Aversion and Comparative Ignorance, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 110, S. 585 – 603.

Fox, Craig R./Weber, Martin (2002), Ambiguity Aversion, Comparative Ignorance, and Decision Context, in: Organizational Behavior and Human Decision Processes, Vol. 88, No. 1, May 2002, pp. 476-498.

Franke, Günter (1978), Expected Utility with Ambiguous Probabilities and „Irrational" Parameters, in: Theory and Decision, Vol. 9, S. 267 - 283.

Gärdenfors, Peter/Sahlin, Nils-Eric (1982), Unreliable Probabilities, Risk Taking, and Decision Making, in: Synthese, Vol. 53, S.361 - 386.

Ghirardato, Paolo (2001), Coping with Ignorance: Unforeseen Contingencies and Non-additive Uncertainty, in: Economic Theory, Vol. 17, S. 247 – 276.

Ghirardato, Paolo/Marinacci, Massimo (2002), Ambiguity Made Precise: A Comparative Foundation, in: Journal of Economic Theory, Vol. 102, S. 251 – 289.

Gierl, Heribert/Helm, Roland/Stumpp, Stefan (2002), Markentreue und Kaufintervalle bei langlebigen Konsumgütern, in: ZfbF, 54. Jg., S. 215 – 232.

Gierl, Heribert/Höser, Hans (2002), Der Reihenfolgeeffekt auf Präferenzen, in: ZfbF, 54. Jg., S. 3 – 18.

Gilboa, Itzhak/Schmeidler, David (1989), Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior, in: Journal of Mathematical Economics, Vol. 18, S. 141 - 153.

Gottinger, Hans W. (1974), Subjektive Wahrscheinlichkeiten

Hammond, Peter J. (1988), Consequentialist Foundations of Expected Utility, in: Theory and Decision, Vol. 25, S.25-78.

Hax, Herbert (1974), Entscheidungmodelle in der Unternehmung – Einführung in Operations Research

Heath, Chip/Tversky, Amos (1991), Preference and Belief: Ambiguity and Competence in Choice under Uncertainty, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 4, S. 5 - 28.

Hilton, Ronald W. (1989), Failure of Blackwell's Theorem Under Machina's Generalization of Expected Utility Analyzis Without the Independence Axiom, in: Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 13, S. 233 - 244.

Janis, Irving L./Mann, Leon (1977), Decision Making

Kahn, Barbara E./Sarin, Rakesh K. (1988), Modeling Ambiguity in Decisions under Uncertainty, in: Journal of Consumer Research, Vol. 15, S. 265 – 272.

Kahneman, Daniel/Slovic, Paul/Tversky, Amos (Hrsg.) (1982), Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases

Kahneman, Daniel/Tversky, Amos (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, in: Econometrica, Vol. 47, S. 263 - 291.

Karni, Edi/Schmeidler, David (1991a), Utility Theory with Uncertainty, in: Hildenbrand, W./Sonnenschein, H. (Hrsg.), Handbook of Mathematical Economics Vol. IV, S. 1763 - 1825.

Karni, Edi/Schmeidler, David (1991b), Atemporal Dynamic Consistency and Expected Utility Theory, in: Journal of Economic Theory 54 (1991), S.401-408.

Keppe, Hans-Jürgen/Weber, Martin (1995), Judged Knowledge and Ambiguity Aversion, in: Theory and Decision, Vol. 39, S. 51 - 77.

Kofler, Eduard/Menges, Günter (1976), Entscheidungen bei unvollständiger Information

Kolmogoroff, Alexander N. (1933), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 2

Krelle, Wilhelm (1968), Präferenz- und Entscheidungstheorie

Laux, Helmut (1976), Zur Entscheidung bei Fehlen objektiver Wahrscheinlichkeiten, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 46. Jg., S. 59 – 68.

Lindstädt, Hagen (2002), Das modifizierte Hurwicz-Kriterium für untere und obere Wahrscheinlichkeiten – ein Spezialfall des Choquet-Erwartungsnutzens, HHL-Arbeitspapier 57.

Maccheroni, Fabio (2002), Maxmin under Risk, in: Economic Theory, Vol. 19, S. 823 – 831.

Machina, Mark J. (1989), Dynamic Consistency and Non-Expected Utility Models of Choice under Uncertainty, in: Journal of Economic Literature, Vol. 27, S. 1622 – 1668.

March, James G. (1988), Variable Risk Preferences and Adaptive Aspirations, in: Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 9, S. 5 - 24.

Montesano, Aldo (2001), Uncertainty with Partial Information on the Possibility of the Events, in: Theory and Decision, Vol. 51 (2 - 4), S. 183 - 195.

Niehans, Jürg (1948), Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen, in: Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Staat, Vol. 84, S. 433 - 456.

Osnabrügge, Gabriele/Stahlberg, Dagmar/Frey, Dieter (1985), Die Theorie der kognizierten Kontrolle, in: Frey, D./Irle, M. (Hrsg.), Theorien der Sozialpsychologie, Band III: Motivations- und Informationsverarbeitungstheorien, S. 127 - 172.

Ott, Notburga (2001), Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden

Quiggin, John (1982), A Theory of Anticipated Utility, in: Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 3, S. 323 - 343.

Raiffa, Howard (1968), Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty

Rommelfanger, Heinrich (1994), Fuzzy Decision Support-Systeme

Sarin, Rakesh/Wakker, Peter (1998), Revealed Likelihood and Knightian Uncertainty, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 16, S. 223 - 250.

Sarin, Rakesh/Winkler, Robert L. (1992), Ambiguity and Decision Modeling: A Preference Based Approach, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 5, S. 389 - 407.

Savage, Leonard J. (1951), The Theory of Statistical Decision, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 46, S. 55 – 67.

Savage, Leonard J. (1954), The Foundations of Statistics

Schmeidler, David (1986), Integral Representation without Additivity, in: Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 97, S.255-261.

Schmeidler, David (1989), Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, in: Econometrica, Vol. 57, S. 571 - 587.

Schmidt, Ulrich (2002), Ist das Unabhängigkeitsaxiom eine notwendige Voraussetzung der präskriptiven Entscheidungstheorie?, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72. Jg., S. 317 – 329.

Schneeweiß, Hans (1963), Kritische Bemerkungen zur Kritik am Wahrscheinlichkeitssubjektivismus, in: Statistische Hefte, Vol. 4, S. 203 - 220.

Smith, Vernon L. (1969), Measuring Nonmonetary Utilities in Uncertain Choices: The Ellsberg Urn, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 83, S. 324 - 329.

Spengler, Thomas (1992), Lineare Entscheidungsmodelle zur Organisations- und Personalplanung

Spengler, Thomas (1999), Grundlagen und Ansätze der strategischen Personalplanung mit vagen Informationen.

Tversky, Amos/Kahneman, Daniel (1992), Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 5, S. 297 - 323.

Wakker, Peter (1988), Nonexpected Utility as Aversion to Information, in: Journal of Behavioral Decision Making, Vol. 1(3), 169 – 175.

Wakker, Peter (2001), Testing and Characterizing Properties of Nonadditive Measures through Violations of the Sure-thing Principle, in: Econometrica, Vol. 69, S. 1039 – 1059.

Wald, Abraham (1945), Statistical Decision Functions which Minimize Maximum Risk, in: Annals of Mathematics, Vol. 46, S. 265 - 280.

Winkler, Robert L. (1991), Ambiguity, Probability, Preference, and Decision Analysis, in: Journal of Risk and Uncertainty, Vol. 4, S. 285 - 297.

Yaari, Menahem E. (1985), On the Role of 'Dutch Books' in the Theory of Choice Under Risk, in: Nancy L. Schwartz Memorial Lecture

Yaari, Menahem E. (1987), The Dual Theory of Choice under Risk, in: Econometrica, Vol. 55, 1/1987, S. 95 - 116.

Yager, Ronald R./Kacprzyk, Janusz/Fedrizzi, Mario (Hrsg.) (1994), Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence