Handelshochschule Leipzig (HHL)

Das modifizierte Hurwicz-Kriterium für untere und obere Wahrscheinlichkeiten

Ein Spezialfall des Choquet-Erwartungsnutzens

Hagen Lindstädt*

HHL-Arbeitspapier Nr. 57

* Professor Dr. Hagen Lindstädt, Lehrstuhl für Strategisches Management und Organisation, Handelshochschule Leipzig, Jahnallee 59, 04109 Leipzig, e-mail: lindstaedt@management.hhl.de.

Der Autor dankt Pierfrancesco La Mura für wertvolle Hinweise.

Zusammenfassung

Für Entscheidungsprobleme jenseits von Bernoulli-Rationalität und subjektivem Erwartungsnutzen existieren zahlreiche Kalküle. Besondere Bedeutung hat der auf eine Axiomatisierung Schmeidlers zurückgehende CEU-Kalkül. Dieser ist gleichzeitig sehr allgemein, aufwendig und schwierig interpretierbar. Der Beitrag definiert das „modifizierte Hurwicz-Kriterium“ als Verallgemeinerung des bekannten Hurwicz-λ-Kriteriums bei Ungewissheit für den Fall, dass untere und obere subjektive Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände vorliegen. Das Ergebnis des Beitrages ist der Beweis, dass dieses Kriterium ein Spezialfall des CEU-Kalküls ist. Die implizierten Präferenzordnungen genügen also insbesondere Schmeidlers Axiomatisierung.

Abstract

For decision making various theories exist beyond Bernoulli rationality and subjective expected utility. A special significance has the CEU-model based on axioms of Schmeidler. At the same time, this model is very general, elaborate, and hard to interpret. This paper defines the “modified Hurwicz criterion” as a generalization of the known Hurwicz-λ-criterion under uncertainty for the case that lower and upper probabilities do exist for the environmental states. Its result is the proof that this criterion is a special case of the CEU-model. The implied preference orders therefore satisfy especially Schmeidler’s axiom.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Einordnung in die Diskussion

Seit einiger Zeit werden eine Vielzahl sogenannter „Nichterwartungsnutzentheorien“ diskutiert, die Savages Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens verallgemeinern. Verstöße gegen die Axiome, die dieser Theorie zugrunde liegen, lassen sich grob in „Allais-artige“ und „Ellsberg-artige“ einteilen. Als Allais-artige Verstöße gegen die Erwartungsnutzenaxiome werden solche bezeichnet, bei denen subjektive Wahrscheinlichkeiten vorliegen, die Wahl jedoch nicht anhand des mit ihnen entwickelten Erwartungsnutzens getroffen wird. Sieht sich der Entscheidungsträger subjektiv nur unter Schwierigkeiten in der Lage, subjektive Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, so werden die entsprechenden Verstöße Ellsberg-artig genannt. Für Allais-artige Verstöße gilt besonders die Theorie des „antizipierten Nutzens“ als interessant, welche Zustandswahrscheinlichkeiten rangabhängig adjustiert (Quiggin 1982).

Liegen beide Klassen von Verstößen vor, so kann auf den CEU-Kalkül zurückgegriffen werden, der sich nicht additiver Kapazitäten anstelle von (additiven) Wahrscheinlichkeitsmaßen bedient. Die implizierten Präferenzzuordnungen genügen der Axiomatisierung von Schmeidler (1989). Leider ist der CEU-Kalkül jedoch sehr aufwendig in der Anwendung und vor allem schwierig interpretierbar.

Für lediglich Ellsberg-artige Verstöße liegt bislang kein überzeugendes Konzept vor; die bisweilen vorgeschlagene Maximierung des minimalen Erwartungsnutzens (Gilboa/Schmeidler 1989) hat den gravierenden Nachteil, stets von einem maximalen Pessimismus des Entscheidungsträgers auszugehen. Dieser Beitrag schlägt eine einfache Erweiterung des bekannten Hurwicz-Kriteriums für Entscheidungen bei Ungewissheit vor. Ungewissheit bezeichnet vollständige Unkenntnis sogar subjektiver Wahrscheinlichkeiten.

Fühlt sich ein Entscheidungsträger in der Lage, untere und obere Wahrscheinlichkeiten für alle Umweltzustände anzugeben, so kann dieses modifizierte Hurwicz-Kriterium angewendet werden. Ungewissheit ist offenbar der Spezialfall unterer und oberer Wahrscheinlichkeiten, bei dem alle unteren Wahrscheinlichkeiten 0 und alle oberen Wahrscheinlichkeiten 1 betragen. Das Kriterium bildet für jede Handlungsalternative eine Konvexkombination H_λ des resultierenden unteren und oberen Erwartungsnutzens mit dem Pessimismus-Parameter $\lambda \in [0;1]$ als Präferenzfunktional. Für $\lambda = 1$ ergibt sich die Maximierung des minimalen Erwartungsnutzens als Spezialfall. Das modifizierte Hurwicz-Kriterium wurde auch von Kofler/Menges (1976) benutzt, allerdings vor einem anderen Hintergrund. Ähnliches gilt für Ghirardato (2001).

Das Ergebnis dieses Beitrages ist der Beweis eines Theorems mit folgendem Inhalt: Liegen für jeden Umweltzustand untere und obere Wahrscheinlichkeiten vor, dann definiert für ein festes $\lambda \in [0;1]$ das Präferenzfunktional H_λ eine Präferenzordnung, die der Axiomatisierung von Schmeidler (1989) genügt. Die Intervalle zulässiger Wahrscheinlichkeiten erzeugen dabei eine (gewöhnlich nicht additive) konvexe Kapazität π_l als ihr Infimum und eine konkave Kapazität π_u als ihr Supremum. Insbesondere erzeugt die Konvexkombination $\pi_\lambda = \lambda \times \pi_l + (1 - \lambda) \times \pi_u$ mit demselben λ eine Kapazität π_λ, deren Choquet-Ewartungsnutzen stets mit dem Präferenzfunktional H_λ des modifizierten Hurwicz-Kriteriums übereinstimmt. Der Beweis zeigt im Wesentlichen diese Gleichheit.

2 Voraussetzungen und Definitionen

Wir gehen von einem Entscheidungsproblem mit endlich vielen Handlungsalternativen $A_1, \ldots, A_A$ und endlich vielen Umweltzuständen $S_1, \ldots, S_S$ aus. Alternative A_a führt bei Zustand S_s zum Nutzen u_{as}, und der Entscheidungsträger misst Zustand S_s die untere Wahrscheinlichkeit p_s^l und die obere p_s^u bei, wobei $0 \le p_s^l \le p_s^u \le 1$ für alle s gilt.

$$P_z := \left\{ (p_1, \ldots, p_S): \quad p_i \in \left[p_i^l; p_i^u \right] \forall i = 1, \ldots, S \wedge \sum_{i=1}^{S} p_i = 1 \right\} \tag{1}$$

bezeichnet die Menge zulässiger Verteilungen. Die subjektiven Zustandswahrscheinlichkeiten liegen also für Zustand S_s im Intervall $[p_s^l; p_s^u]$; weiter ist nichts über sie bekannt. Im Fall $p_s^l = p_s^u$ für alle s liegt eine Entscheidung bei Risiko vor.

Für jede Alternative bezeichnet $E_{Min}(U(A_a))$ den minimalen und $E_{Max}(U(A_a))$ den maximalen Erwartungsnutzen, der mit der Menge der unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten verträglich ist, d. h.

$$E_{Min}(U(A_a)) := \inf_{p \in P_z} \{ E_p(U(A_a)) \} \tag{2}$$

und

$$E_{Max}(U(A_a)) := \sup_{p \in P_z} \{ E_p(U(A_a)) \} \tag{3}.$$

E_p bezeichnet den Erwartungswert bei Vorliegen von Verteilung $p = (p_1, \ldots, p_S)$. Weil die Intervalle geschlossen sind, werden die Extrema in (2) und (3) offenbar angenommen. Die Berechnung der E_{Min} $(U(A_a))$ und E_{Max} $(U(A_a))$ erfolgt einfach über die aus Nutzensicht am wenigsten und am meisten vorteilhafte Verteilung, die mit den gegebenen Wahrscheinlichkeitsintervallen verträglich ist. Formal liegt für jede Alternative ein lineares Minimierungs- und ein lineares Maximierungsproblem vor. Aus dieser Überlegung wird auch deutlich, dass für jede Alternative alle Erwartungswerte im Intervall $[E_{Min}\ (U(A_a));\ E_{Max}\ (U(A_a))]$ konsistent mit den Wahrscheinlichkeitsintervallen sind. Umgekehrt kommt jeder Wert im Intervall auch als Erwartungswert einer zulässigen Verteilung vor, nämlich als Konvexkombination der Verteilungen, die zu minimalem und maximalem Erwartungswert der Alternative führen („Extremalverteilungen“). Insofern kann zu Recht davon gesprochen werden, dass jeder Alternative ein *Erwartungsnutzenintervall* zugeordnet ist.

Für den festen, reellen Parameter $\lambda \in [0;1]$ ist das modifizierte Hurwicz-Präferenzfunktional H_λ für Alternative A_a definiert als

$$H_\lambda(A_a) \quad := \quad \lambda \times E_{Min}(U(A_a)) \quad + \quad (1-\lambda) \times E_{Max}(U(A_a)) \qquad (4).$$

Für Teilmengen T möglicher Umweltzustände, $T \subset \{S_1, \ldots, S_S\}$, werden folgende Maße definiert:

$$\pi_l(T) \quad := \quad \inf_{p \in P_z} \{p(T)\} \qquad (5)$$

und

$$\pi_u(T) \quad := \quad \sup_{p \in P_z} \{p(T)\} \qquad (6)$$

sowie

$$\pi_\lambda(T) \quad := \quad \lambda \times \pi_l(T) + (1-\lambda) \times \pi_u(T) \qquad (7).$$

π_l (T) ist also die kleinste, π_u (T) die größte Wahrscheinlichkeit, die mit den unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten, d. h. mit P_z verträglich ist.

π_l und π_u sind jedoch im Allgemeinen keine Wahrscheinlichkeitsmaße für Zustandsmengen T, weil Infimum und Supremum bei Vereinigung zweier disjunkter Mengen T und U in der Regel nicht additiv sind. Es wird sich jedoch zeigen, dass π_l stets eine konvexe und π_u eine konkave Kapazität ist, und dass es sich auch bei π_λ um eine Kapazität handelt. Als Kapazität auf einer Obermenge bezeichnet man ein (Mengen-)Maß π, das folgende Eigenschaften erfüllt (Schmeidler 1989):

(a) $(\emptyset) = 0$

(b) $(S) = 1$

(c) $T \subseteq U \Rightarrow \pi(T) \leq \pi(U) \;\forall\; T,U \subseteq S$.

Eigenschaft (c) wird als Monotonie von Kapazitäten bezeichnet. Alle Wahrscheinlichkeitsmaße sind offenbar Kapazitäten, nicht jedoch umgekehrt. π wird konvex genannt, wenn für zwei beliebige Mengen T und U gilt:

$\pi(T \cup U) + \pi(T \cap U) \geq \pi(T) + \pi(U)$.

Gilt diese Ungleichung stattdessen mit dem „≤“-Zeichen, so ist π konkav. Gewöhnlich jedoch sind Kapazitäten weder konvex noch konkav.

Für die Berechnung des Choquet-Erwartungswertes von Alternative A_a bei Vorliegen der Kapazität π, $CEU_\pi(A_a)$, werden zunächst die Zustände nach absteigenden Nutzenwerten geordnet und neu nummeriert, d. h. nach der Umnummerierung gilt $u_{a1} \geq u_{a2} \geq \ldots \geq u_{as}$. Dann gilt nach Schmeidler (1989)

$$CEU_p(A_a) = \sum_{i=1}^{S} u_{ai} \left[p\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j \right) - p\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j \right) \right] \qquad (8).$$

Für i=1 steht in der hinteren runden Klammer eine leere Vereinigung, die definitionsgemäß die leere Menge ist und somit eine Kapazität von 0 hat.

3 Theorem

Mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Abschnitt gilt folgendes Theorem:

Theorem: Bei einem Entscheidungsproblem mit endlichen vielen Handlungsalternativen und Umweltzuständen liegen untere und obere Wahrscheinlichkeiten vor. Für einen reellen Parameter $\lambda \in [0;1]$ und mit den Definitionen (1) bis (8) gilt dann:

(a) π_l ist eine konvexe Kapazität,
π_u ist eine konkave Kapazität,
π_λ ist eine Kapazität.

(b) Der Choquet-Erwartungsnutzen der Kapazität π_λ stimmt bei identischem λ für jede Alternative A_a mit dem modifizierten Hurwicz-Präferenzfunktional H_λ überein, d. h. es gilt $CEU_{p_l}(A_a) = H_l(A_a)$.

(c) Durch H_λ wird eine Präferenzordnung auf der Alternativenmenge $\{A_1, ..., A_A\}$ induziert, die den Axiomen von Schmeidler (1989) genügt.

Der Beweis des Theorems folgt in Abschnitt 4. Insbesondere überlegt man sich, dass aus $H_\lambda (A_i) > H_\lambda (A_j)$ *nicht* notwendig folgt, dass es eine zulässige Verteilung $p \in P_z$ gibt, so dass $E_p (U(A_i)) > E_p (U(A_j))$.

Eine präferierte Alternative muss also für keine zulässige Verteilung einen höheren Erwartungswert aufweisen; sonst würden im Umkehrschluß die Präferenzen des modifizierten Hurwicz-Kriteriums niemals gegen die Axiome der subjektiven Erwartungsnutzentheorie verstoßen, was aber bekanntlich der Fall ist.

Aus (c) folgt mit Schmeidler (1989) insbesondere, dass die Präferenzordnung das Unabhängigkeitsaxiom (“sure thing principle“) der subjektiven Erwartungsnutzentheorie für komonotone Alternativen erfüllt. Zwei Alternativen A_i und A_j sind komonoton, wenn sie die Zustände in die gleiche Ergebnisrangfolge bringen, d. h. wenn für jedes Paar von Zuständen S_r und S_s gilt: $u_{ir} > u_{is} \Rightarrow u_{jr} > u_{js}$. Für nicht komonotone Alternativen muss das Unabhängigkeitsaxiom in Schmeidlers Axiomatisierung nicht erfüllt sein.

Das Ergebnis lässt sich folgendermaßen veranschaulichen: Zunächst wird die Untersuchung der Alternativen auf Nutzenerwartungen reduziert, also auf die Erwartungsnutzenintervalle. Tatsächlich existieren für jeden Erwartungsnutzen in dem Intervall auch zulässige Verteilungen, die diesen erzeugen. Eine Verdichtung auf eine Zahl muss linear in den Intervallendpunkten sein, damit sie mit einer fundamentalen Eigenschaft des

Risikonutzens im Sinne von Neumanns und Morgensterns verträglich ist, die auch der CEU-Kalkül verwendet: der Invarianz der Präferenzordnung gegen positive Skalierungen (Multiplikation mit einem positiven Faktor). Jede nicht (positiv) lineare Funktion der beiden Endpunkte könnte nämlich bei Multiplikation aller Nutzenwerte mit einer geeigneten positiven Konstante die Rangfolge der Alternativen hinsichtlich des Präferenzfunktionals verändern. Eine Normierung eines beliebigen positiven Funktionals führt andererseits automatisch auf das modifizierte Hurwicz-Kriterium.

Es existiert eine gut ausgearbeitete Theorie, die sich mit oberen und unteren Wahrscheinlichkeiten beschäftigt: Die Evidenztheorie von Dempster und Shafer; ihre Ursprungsarbeit ist Dempster (1967). Die Evidenztheorie bezeichnet untere Wahrscheinlichkeiten als Glaubwürdigkeiten („beliefs“) und obere als Plausibilitäten („plausibilities“). Beide sind Kapazitäten, wobei Glaubwürdigkeiten konvex und Plausibilitäten konkav sind. Trotz der großen Bedeutung von unteren und oberen Wahrscheinlichkeiten für Entscheidungskalküle bei Ambiguität, die sich schon aus Ellsbergs Beispiel ergibt, und die nicht zuletzt in ihrer klaren und einfachen Interpretation begründet liegt, findet dieser Ansatz bislang noch vergleichsweise wenig Beachtung. Dies liegt vermutlich nicht zuletzt daran, dass eine einfache axiomatische Verankerung wie die hier gegebene bislang nicht vorlag.

4 Beweis des Theorems

(zu a)

Aus der Definition von π_l und π_u folgt, dass es sich bei diesen Maßen um Kapazitäten handelt, vgl. auch Ott (2001), S. 63 f. Die Konvexität von π_l beweist Schmeidler (1986), der Beweis der Konkavität von π_u verläuft analog. Außerdem folgt aus der Definition von Kapazitäten unmittelbar, dass Konvexkombinationen von Kapazitäten wieder Kapazitäten sind: Neben dem Maß von leerer Menge mit 0 und dem der Obermenge mit 1 überträgt sich auch die Monotonie bei Bildung von Konvexkombinationen offensichtlich. Damit ist (a) bewiesen.

(zu b)

Zu zeigen ist $CEU_{p_l}(A_a) \overset{!}{=} H_l(A_a)$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
&CEU_{p_l}(A_a) \\
&= \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\left[l p_l\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j\right) + (1-l) p_u\left(\bigcup_{j=1}^{i} S_j\right) - l p_l\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j\right) - (1-l) p_u\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} S_j\right)\right] \\
&= l \times \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\left[\inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right) - \inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right)\right] + (1-l)\times \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\left[\sup_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right) - \sup_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Nach Definition von H_λ ist (b) also bewiesen, sobald Folgendes gezeigt wird:

$$(i) \quad \inf_{p\in P_z}\left[\sum_{i=1}^{S} u_{ai} p_i\right] \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\left[\inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right) - \inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right)\right]$$

sowie

$$(ii) \quad \sup_{p\in P_z}\left[\sum_{i=1}^{S} u_{ai} p_i\right] \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\left[\sup_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right) - \sup_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right)\right]$$

Es ist also mit anderen Worten zu zeigen, dass die Wahl der Zustandswahrscheinlichkeiten als Gewichte aus den Choquet-Kapazitäten das Erwartungswertfunktional im zulässigen Bereich gerade minimiert (i) bzw. maximiert (ii). Dies ist der Definition der Gewichte des Choquet-Erwartungsnutzens bei konvexen bzw. konkaven Kapazitäten tatsächlich inhärent, wie folgende Überlegungen verdeutlichen:

(zu i)

Wähle $p_i^* := \inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j)\right) - \inf_{p\in P_z}\left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j)\right) \quad \forall\ i = 1,\dots,S$

(α) $p^* = \left(p_1^*,\dots,p_S^*\right)$ ist nach Konstruktion der p_i^* zulässig.

(β) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{S} u_{ai} p_i^* = \inf_{p \in P_z} \left[\sum_{i=1}^{S} u_{ai} p_i^* \right],$$

d.h. p_i^* minimiert das Erwartungswertfunktional: Wähle $\tilde{p} = (\tilde{p}_i, ..., \tilde{p}_S)$ mit $\tilde{p} \neq p^*$.

Sei k der kleinste Index, für den $\tilde{p}_k \neq p_k^*$.

Fall 1: $\tilde{p}_k > p_k^* \Rightarrow \sum_{i=k}^{S} u_{ai}\, \tilde{p}_i > \sum_{i=k}^{S} u_{ai} p_i^*$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{S} u_{ai}\, \tilde{p}_i > \sum_{i=1}^{S} u_{ai} p_i^*,$$

weil sich die Gewichte zu 1 addieren müssen und die u_{ai} absteigend geordnet sind.

Fall 2: $\tilde{p}_k < p_k^* = \inf_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{k} p(S_j) \right) - \inf_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p(S_j) \right)$

$$\Rightarrow \inf_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p(S_j) \right) + \tilde{p}_k < \inf_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{k} p(S_j) \right)$$

$\Rightarrow \tilde{p} \notin P_z$, weil sich sonst ein Widerspruch zur Wahl eines der beiden Infima ergibt.

p^* ist also zulässig und minimiert das Erwartungswertfunktional. Damit ist (i) gezeigt.

(ii) folgt mit analoger Argumentation: $\hat{p} = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_S)$ mit

$$\hat{p}_i = \sup_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{i} p(S_j) \right) - \sup_{p \in P_z} \left(\sum_{j=1}^{i-1} p(S_j) \right)$$

maximiert das Erwartungswertfunktional unter zulässigen Verteilungen. Damit ist Teil (b) des Theorems bewiesen.

(zu c)

Aus der Gleichheit der Präferenzfunktionale, die in (b) bewiesen werden, folgt (c) unmittelbar, weil nach Schmeidler (1989) die Präferenzen, die das Funktional CEU_{π_λ} induziert, seiner Axiomatisierung gehorchen. Damit ist das Theorem bewiesen, q. e. d..

5 Resümee

Der CEU-Kalkül und Schmeidlers Axiomatisierung sind zwar sehr allgemeingültig, leider jedoch auch aufwendig in der Anwendung und schwierig interpretierbar. Für den wichtigen Spezialfall, dass für alle Zustände untere und obere (subjektive) Wahrscheinlichkeiten vorliegen, erweist sich das modifizierte Hurwicz-Kriterium, eine Verallgemeinerung des bekannten Hurwicz-λ-Kriteriums bei Ungewissheit, als wichtiger Spezialfall des CEU-Kalküls.

Dieser Spezialfall ist gleichermaßen einfach anwendbar, klar interpretierbar und gut kompatibel mit der Theorie des subjektiven Erwartungsnutzens. Er erlaubt die Modellierung Ellsberg-artiger Verstöße gegen die Axiome der subjektiven Erwartungsnutzentheorie.

Weiterer Forschungsbedarf liegt besonders in zwei Richtungen:

- Zunächst wäre eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Wahrscheinlichkeitsintervallen auf beliebige, konvexe Wahrscheinlichkeitsmengen wünschenswert, die direkt an der Maximierung der minimalen Nutzenerwartung von Gilboa/ Schmeidler (1989) ansetzt.
- Besonders erstrebenswert ist eine Axiomatisierung, welche das modifizierte Hurwicz-Kriterium notwendig charakterisiert und nicht nur auf diejenige von Schmeidler (1989) zurückführt. Das modifizierte Hurwicz-Kriterium ist ein Spezialfall des CEU-Kalküls, enthält seinerseits aber die subjektive Erwartungsnutzentherie als Spezialfall. Deshalb ist zu erwarten, dass in einer solchen Axiomatisierung das Unabhängigkeitsaxiom nur für eine echte Teilmenge *aller* Alternativenpaare gilt, aber für eine echte Obermenge *aller komonotonen* Alternativenpaare.

Literaturverzeichnis

Dempster, Arthur (1967), *Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping*, in: Annals of Mathematical Statistics, Vol. 38, S. 325 - 339.

Ghirardato, Paolo (2001), *Coping with Ignorance: Unforeseen Contingencies and Non-additive Uncertainty*, in: Economic Theory, Vol. 17, S. 247 – 276.

Gilboa, Itzhak/Schmeidler, David (1989), *Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior*, in: Journal of Mathematical Economics, Vol. 18, S. 141 - 153.

Kofler, Eduard/Menges, Günter (1976), *Entscheidungen bei unvollständiger Information*.

Ott, Notburga (2001), *Unsicherheit, Unschärfe und rationales Entscheiden.*

Quiggin, John (1982), *A Theory of Anticipated Utility, in: Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 3, S. 323 - 343.

Schmeidler, David (1986), *Integral Representation without Additivity*, in: Proceedings of the American Mathematical Society 97(2), S. 253 – 261.

Schmeidler, David (1989), *Subjective Probability and Expected Utility without Additivity*, in: Econometrica, Vol. 57, S. 571 - 587.